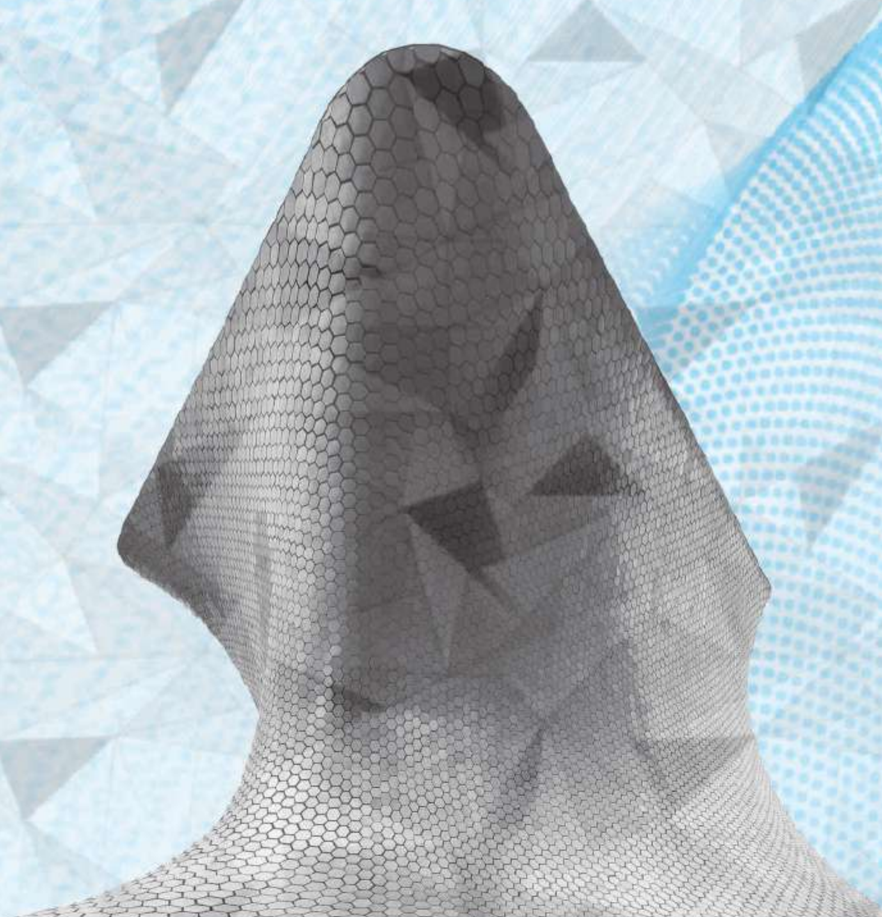
Pensamiento Matemático II

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Armando Flórez Arco
César Pilar Quintero Campos



Pensamiento Matemático II

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Armando Flórez Arco
César Pilar Quintero Campos

Pensamiento Matemático II

Faustino Vizcarra Parra
Rolando Alberto Forneiro Rodríguez
Victoria Bárbara Arencibia Sosa
Armando Flórez Arco
César Pilar Quintero Campos

Primera edición, noviembre de 2024

Universidad Autónoma de Sinaloa
Dirección General de Escuelas Preparatorias
Ciudad Universitaria, Circuito Interior Ote. S/N, C.P. 80013
Teléfono: 667 712 1653, Culiacán, Sinaloa, México

Luis González Obregón S/N, C.P. 80135, Nuevo Bachigualato,
Teléfono: 667 712 2950, Culiacán, Sinaloa, México

Diseño editorial: Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.
Diseño de portada: Irán Ubaldo Sepúlveda León
Fotografía de la portada: Museo Soumaya, https://pxhere.com, By: naturemyhome, user_id: 10227311, Canon EOS 70d, JPG, 5472 x 3648, Fecha de publicación: 26 de septiembre de 2018

Número de Registro: 03-2024-102412195500-01
ISBN: 978-607-9432-67-6

Impreso en México
Printed in Mexico

Dedicatoria y agradecimientos

A nuestros queridos docentes

Con profundo agradecimiento y admiración dedicamos este libro a aquellas y aquellos profesores excepcionales que, con su pasión por la enseñanza y su compromiso inquebrantable, han guiado la creación de estas páginas. Su dedicación en el desarrollo del pensamiento aritmético, algebraico y geomético ha iluminado el camino a otros docentes del Nivel Medio Superior (NMS) de la Universidad Autónoma de Sinaloa (UAS).

Sus enseñanzas han sido como faros de sabiduría, iluminando mentes, inspirando la curiosidad y fomentando el gusto por el aprendizaje. En este sentido, este libro es un testimonio de ese arduo trabajo y devoción, y esperamos que sea bien recibido para formar las nuevas generaciones de estudiantes. Así, su uso en el proceso de enseñanza y aprendizaje nos invita a seguir aprendiendo y creciendo como un equipo de docentes, que ven en la innovación la importancia de incorporar la inteligencia artificial (IA) como un aliado.

Tomemos en cuenta que la integración de la inteligencia artificial en el proceso de enseñanza y aprendizaje emerge como un catalizador fundamental para el desarrollo del pensamiento aritmético, algebraico y geométrico. Al aprovechar sus capacidades, la IA puede facilitar el acceso al conocimiento, personalizar el aprendizaje, optimizar los métodos pedagógicos y evaluar los resultados. Además, el estudiante la puede utilizar como un tutor en su proceso de aprendizaje. En definitiva, se reconoce el impacto de la IA como un aliado del docente en el proceso educativo.

En agradecimiento por sembrar las semillas para el desarrollo del pensamiento matemático en las y los estudiantes del NMS de la UAS, les extendemos nuestro más sincero agradecimiento. Que este libro sea un tributo a su legado en la formación de mentes brillantes y pensadores en el quehacer de las matemáticas.

Colaboradores:

Efraín Meza Valdez	UAP La Cruz
Martín Luna Belmar	
Abril Liseth Fierro Romero	UAP Los Mochis
Jesús Antonio García Duarte	
Yadira Esmeralda Gutiérrez Esquivel	
Adriana Gutiérrez García	
Edith Ivett Ocampo Manjarrez	
Paola Elifelet Reyes Álvarez	
Erick Eduardo Romero Gómez	
Adán Meza Sánchez	UAP CMDTE. Víctor M. Tirado
Benito Uriel Terrazas Inzunza	UAP Navolato
Felipe de Jesús Sicairos Avitia	
Ramiro Amezcua Reyes	UAP CU Los Mochis
Rogelio Romero Fitch	
Paloma Sandoval Gámez	
María del Pilar Madrid Solís	

José Humberto Romero Fitch	
Heriberto Carlos Ayala Cruz	
Oscar Mauricio Heredia Ruiz	
Horacio Gabriel López Ramírez	
Sandra Araceli Arreola Mora	AUP Heraclio Bernal
Jorge Ramos Martínez	UAP Escuinapa
Luis Felipe Flores Tirado	UAP Dr. Salvador Allende
Policarpio Sicairos Avitia	UAP Hermanos Flores Magón
Santiago Meza Olivas	
Asia Cecilia Carrasco Valenzuela	UAP Rubén Jaramillo
Ismael Aranda Estrada	
Iliana Tirado Olivas	
Jorge Radney Montgomery Leyva	UAP Valle del Carrizo
Guadalupe Elevier Hernández Trejo	
Juana María Armenta Trasviña	UAP Guasave Diurna
Silvia Bojórquez Soto	
Claudia Edith Carrillo Castillo	
Juan Carlos Pazos Robles	
Arturo Trasviña López	
Reyna Jesús Trasviña López	
Joel Acosta Orozco	
Nereyda de Jesús Díaz Gustavo	UAP 8 de Julio extensión Dr. Gabino Barreda de Juan Aldama
Juan Antonio León López	
Melesio de Jesús Niebla Sotelo	UAP 8 de julio
Izeth Saraí Rivera Díaz	UAP Los Mochis Extensión Macapule
Zayto Baltazar Peñuelas Borboa	
Fernando Tomás Gil Camacho	UAP Victoria del Pueblo
Anarelli Corona Cárdenas	
Carmen Leonor Castro Millán	UAP Vladimir Ilich Lenin
María Esther Franco González	
Yoanna Marisol Mercado Lizarde	
Eva Edith Verdugo Serrano	UA Preparatoria Ruiz Cortines P
Alma Rosario Gámez Vázquez	
Daniela Castro Miranda	
Irma del Carmen Jacobo Melo	UAP Emiliano Zapata
Poignet Ayala Zazueta	
Jorge Aldivar Contreras Espinoza	UAP Casa Blanca
Lorena Leal Montoya	
Clarisa López Aboyte	
María del Rosario Llanes Molinero	
Nereyda Beatriz González López	
Rubén Abel Castro León	
Ramón Chávez Valenzuela	UAP Central Diurna
Fernando Eleazar Acosta Cruz	DGEP

Tabla de categorías,
subcategorías, aprendizajes de trayectoria y metas de aprendizaje de Pensamiento Matemático II

Categorías			
C1 Procedural	**C2** Procesos de intuición y razonamiento	**C3** Solución de problemas y modelación	**C4** Interacción y lenguaje matemático
Subcategorías			
S1 Elementos aritmético-algebraicos	**S1** Capacidad para observar y conjeturar	**S1** Uso de modelos	**S1** Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico
S2 Elementos geométricos	**S2** Pensamiento intuitivo	**S2** Construcción de modelos	**S2** Negociación de significados
	S3 Pensamiento formal	**S3** Estrategias heurísticas y ejecución de procedimientos no rutinarios	**S3** Ambiente matemático de comunicación
Aprendizajes de Trayectoria			
Valora la aplicación de procedimientos automáticos y algorítmicos, así como la interpretación de sus resultados para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas matemáticos, de áreas del conocimiento y de su vida personal.	Adopta procesos de razonamiento matemático tanto intuitivos como formales tales como observar, intuir, conjeturar y argumentar, para relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).	Modela y propone soluciones a problemas tanto teóricos como de su entorno, empleando lenguaje y técnicas matemáticas.	Explica el planteamiento de posibles soluciones a problemas y la descripción de situaciones en el contexto que les dio origen empleando lenguaje matemático y lo comunica a sus pares para analizar su pertinencia.
Metas de Aprendizaje			
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	**M1-C2** Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	**M1-C3** Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	**M1-C4** Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del pensamiento matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	**M2-C2** Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieran explicación o interpretación.	**M2-C3** Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	**M2-C4** Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	**M3-C2** Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	**M3-C3** Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del pensamiento matemático, de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno.	M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.
	M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	**M4-C3** Construye y plantea posibles soluciones a problemas de áreas de conocimiento, recursos sociocognitivos, recursos socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	

Presentación

Es un placer presentarles este libro de *Pensamiento Matemático II,* que ha sido cuidadosamente diseñado para acompañar a las y los estudiantes de bachillerato en su fascinante travesía por el mundo de esa maravillosa forma matemática de pensar denominada pensamiento matemático, que proporciona una base sólida y estimulante para el aprendizaje.

Así, este libro es para utilizarse en la Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) Pensamiento Matemático II del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático, correspondiente al segundo semestre del componente fundamental y extendido del Plan de estudios (UAS, 2024) del Currículo del bachillerato de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2024 que, de acuerdo con el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior (MCCEMS) establecido por la Secretaría de Educación Pública (SEP, 2023a), enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático.

El pensamiento matemático, según el MCCEMS, se define como

> un Recurso Sociocognitivo que involucra diversas actividades cognitivas que van desde la ejecución de operaciones y el desarrollo de procedimientos y algoritmos hasta abarcar procesos mentales abstractos, incluida la intuición, que se dan cuando el sujeto participa del quehacer matemático al resolver problemas, usar o crear modelos, elaborar tanto conjeturas como argumentos y organizar, sustentar y comunicar sus ideas. (SEP, 2023c, p. 17)

La secuencia de este libro está basada en progresiones de aprendizaje, cada una diseñada para desarrollar sobre la anterior un pensamiento matemático; para el caso particular de esta UAC, un pensamiento aritmético, algebraico y geométrico.

En el sentido anterior, las progresiones de aprendizaje (PA) de la UAC Pensamiento Matemático II desarrollan el pensamiento aritmético, algebraico y geométrico para el logro de las metas de aprendizaje en la siguiente secuencia:

- PA 1. El lenguaje natural y el lenguaje matemático.
- PA 2. Las expresiones algebraicas.
- PA 3. Resolución de problemas utilizando el lenguaje algebraico.
- PA 4. Relaciones entre números enteros.
- PA 5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- PA 6. El conjunto de los números reales.
- PA 7. Proporcionalidad directa e inversa.
- PA 8. Elementos de matemática financiera.
- PA 9. Figuras geométricas planas y su área.
- PA 10. Aplicación de resultados de la geometría euclidiana, teorema del triángulo de Napoleón.
- PA 11. Elementos básicos de geometría analítica.
- PA 12. Resolución de problemas aplicando funciones lineales, cuadráticas y polinomiales.
- PA 13. Resolución de problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica.
- PA 14. Desigualdades y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas.

Bajo esta lógica del proceso de desarrollo del pensamiento matemático, las progresiones de aprendizaje están estructuradas y secuenciadas, en el sentido de que cada una es más compleja que la anterior, de acuerdo al nivel de pensamiento matemático que demande cada progresión. Cada una de ellas, se inicia con una situación contextualizada o evaluación diagnóstica; luego, le siguen ejemplos, actividades y evaluación formativas que fueron diseñadas atendiendo a las subcategorías de las categorías del pensamiento matemático, mismas que orientan hacia el logro de las metas de aprendizaje; al final cuenta con instrumentos para la autoevaluación y coevaluación.

Además, en cada PA se consideran tres momentos claves de la evaluación: diagnóstica, formativa (mientras se aprende) y final; haciendo énfasis en la evaluación formativa en función de la retroalimentación, para que, durante el proceso de realizar las actividades de aprendizaje, las y los docentes puedan determinar el nivel de logro por los estudiantes, en particular, de las metas de aprendizaje que contribuyen a los aprendizajes de trayectoria. Es decir, se utiliza la evaluación formativa como herramienta para comprender su progreso y ajustar, en consecuencia, las estrategias activas.

También, durante el proceso de aprendizaje, en cada PA se lleva a cabo la autoevaluación (A), coevaluación (C) y heteroevaluación (H); para ello, se implementa como técnica principal de evaluación la observación, utilizando guías específicas para tal fin. Los resultados se reflejarán en la tabla que aparece al inicio de cada progresión en correspondencia con el desempeño.

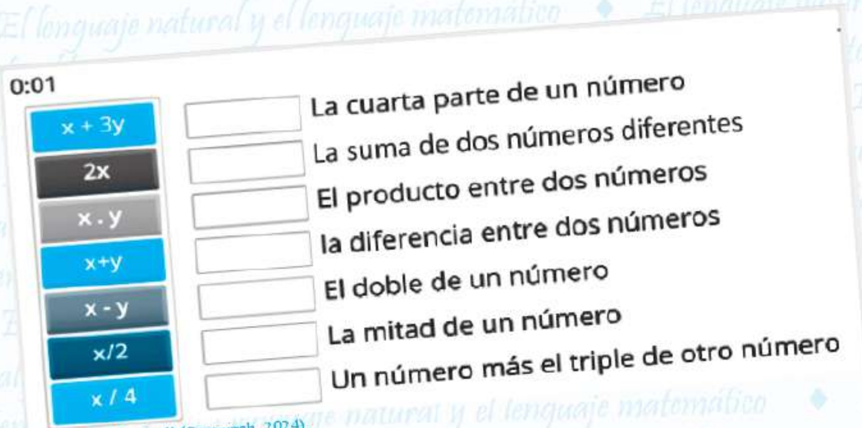
Por otra parte, se sugiere usar los códigos QR (generados en parzibyte: https://parzibyte.me/apps/generador-qr/), así como la Inteligencia Artificial y las aplicaciones de celular como aliados en este proceso de aprendizaje.

Finalmente, el desarrollar un pensamiento matemático no solo les abrirá las puertas en el aula, sino que también los acompañará a lo largo de sus vidas, dotándoles de la capacidad de enfrentar cualquier desafío con ingenio y perspicacia.

¡Adentrémonos juntos en el fascinante universo del pensamiento matemático!

Contenido

El lenguaje natural y el lenguaje matemático



Fuente: Wordwall (Smunizch, 2024).

Progresión de aprendizaje 1

Compara considerando sus aprendizajes de trayectoria, el lenguaje natural con el lenguaje matemático, para observar que este último requiere de precisión y rigurosidad.

Meta de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

Seguramente te comunicas a diario con tus compañeros de grupo, amigos o familiares, utilizando diferentes expresiones y junto con el lenguaje común mezclas términos o expresiones de las matemáticas que has aprendido y que te resultan cómodos para simplificar lo que estás comunicando. Las expresiones o símbolos matemáticos que acostumbras en esas formas de comunicarte forman parte, sin embargo, del lenguaje matemático, el cual tiene un significado propio y preciso, aspectos muy importantes en el contexto y la comprensión de esta disciplina; comencemos analizando qué tanto haces uso de expresiones de ese tipo.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 1.1

1. Relaciona ambas columnas:

Mi fin de semana estuvo muy x	
Mi recámara mide 2.6 m por 2.85 m	
Miércoles de 3×2 en el cine	Lenguaje matemático
$y + 3 = 7$, $y = 4$ es la solución	Lenguaje natural
♡ Te quiero hasta el ∞	
Te veo en la KZ llevo raspa2	

2. ¿Qué diferencias consideras que existen entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático?

____

____

____

En vacaciones navideñas el abuelo de Camila los visitó. Al llegar a la casa, el abuelito la invitó a ir de compras. Al entrar a la tienda de autoservicio el abuelito observó en la sección de artículos para automóviles el siguiente anuncio: "Llantas de $ 3,300.00 con un 35% de descuento", ¿cuánto pagaría el abuelito por una llanta para su automóvil?

También había una oferta de 3×2 en la compra de las llantas, ¿cuánto pagaría el abuelo por sus cuatro llantas?

Al regresar a casa, Camila se dio cuenta que su abuelito estaba muy cansado y se preguntó qué diferencia de edad existía entre ellos, así que decidió preguntarle: ¿qué edad tienes abuelito? y el abuelito, con agilidad mental le contestó: el cuadrado de tu edad menos el cuádruplo de esta, disminuido en 22. Camila, que tiene 12 años, se quedó pensando en la edad de su abuelito y cómo calcularla.

Es común que cuando vamos a hacer las compras nos encontremos con alguna oferta, como el clásico 3×2 en algunos de nuestros productos favoritos. Al ver esto, sabemos que se trata de la compra de tres productos al precio de dos sin necesidad de leer un enunciado largo o una explicación.

Esto, es uno de los tantos ejemplos del uso del lenguaje matemático para facilitar la representación de situaciones cotidianas y es posible que ni siquiera lo hayas notado.

Así, comenzamos esta Unidad de Aprendizaje Curricular (UAC) con razonamientos de índole matemático que nos permitirán representar fenómenos y solucionar problemas de diferente tipo a través de un lenguaje particular, natural o coloquial asociado a las matemáticas, y que se compone de reglas basadas en las propiedades de los números reales y las operaciones que podemos realizar con ellos.

Lenguaje natural y lenguaje matemático

Así como nuestro idioma posee reglas gramaticales para estructurar oraciones y/o hacer traducciones, por ejemplo, en las plataformas de diversas redes sociales; en matemáticas, hay ciertas estructuras a seguir para hablar o traducir esa locución al lenguaje natural.

En general, el **lenguaje natural** o común es el que empleamos a través de un código (compuesto por el abecedario) o lenguaje, por lo que a partir de este podemos relacionarnos diariamente.

El **lenguaje matemático** es una forma de traducir a símbolos y números el lenguaje natural; así, se puede expresar cualquier cantidad con símbolos fáciles de escribir, para simplificar expresiones.

Actividad formativa 1.1

Utiliza la inteligencia artificial para obtener una caracterización del lenguaje natural y del lenguaje matemático y establece las diferencias entre ambos.

1. Lenguaje natural: ______________________________
   ____
   ____
2. Lenguaje matemático: ______________________________
   ____
   ____
3. Diferencias entre:

Lenguaje natural	Lenguaje matemático

Actividad formativa 1.2

1. Para acercarnos al uso de símbolos que sustituyan el lenguaje natural, diseña a continuación una frase coloquial en la que se cambien las letras por un símbolo, letra o número, por ejemplo:
   a) A María le gustan los hela2
   b) ______________________________
   c) ______________________________
   d) ______________________________
2. Tu generación ha estado muy relacionada con el uso de símbolos que remplazan palabras, por ejemplo, al escribir en WhatsApp® usamos los emojis y muchos símbolos cuya función es entre otros aspectos, comunicarte y darte identidad utilizando menos texto. En la siguiente tabla aparecen algunos símbolos, escribe el significado que le das a cada uno de ellos:

Símbolo	Significado
∞	
	
TQM	
$\neq$	
%	
ok	

El **Álgebra** es una rama de las matemáticas que en su estudio emplea números, letras y signos para indicar las operaciones aritméticas. Con el fin de manejar el lenguaje matemático:

- Se usan todas las letras del abecedario.
- Las primeras letras se usan como valores conocidos o constantes.
- Las últimas letras se emplean como valores no conocidos o variables.

A continuación vas a realizar una serie de actividades diseñadas para explorar las distinciones entre el lenguaje natural y el lenguaje matemático. Estas actividades te permitirán adentrarte en la esencia de la precisión matemática en contraste con la riqueza y flexibilidad del lenguaje cotidiano.

De hecho, las expresiones matemáticas que se utilizan en el lenguaje común pueden no tener el mismo significado que cuando se utilizan formalmente en el lenguaje matemático, como es el ya mencionado 3×2, si se refiere, en un caso, a una oferta de productos en un mercado o, en el otro, al producto de dos números naturales. Sin embargo, se trata no sólo de entender sus diferencias, sino también apreciar cómo pueden complementarse para transmitir conceptos con claridad y eficacia en una variedad de situaciones.

En la siguiente tabla puedes identificar las expresiones o términos del lenguaje natural que más se utilizan para reconocer diferentes operaciones matemáticas:

Términos para identificar las operaciones en lenguaje matemático			
Término	Significado	Término	Significado
Suma	Adición, aumentar, exceder, más, agregar.	Al cuadrado	Elevado a la 2.
Resta	Sustraer, diferencia, menos, disminuir, menos que, quitar.	Al cubo	Elevado a la 3.
Multiplicación	Producto, por, multiplicado por, tantas veces.	Igual	Igual a, igualdad, es.
División	Cociente, entre, dividido por, razón de, porción, parte.		

¿Recuerdas lo que dijo el abuelo a Camila sobre su edad? Para traducir del lenguaje natural al lenguaje matemático esa expresión puedes destacar algunas palabras que resultan claves:

"el **cuadrado** de tu edad **menos** el **cuádruplo** de esta, **disminuido** en 22".

Así, de acuerdo con la tabla anterior si la edad de Camila se representa por x, entonces podemos sustituir las palabras en negritas por la operación matemática que se le asocia y se obtiene la expresión, en lenguaje matemático, que representa la edad del abuelo: $x^2 - 4x - 22$.

Actividad formativa 1.3

1. Representa en lenguaje matemático las siguientes expresiones:
   a) La mitad de un número disminuido en dos: ____________________
   b) Un número cualquiera es igual a la mitad de otro: ____________________
   c) El triplo de la suma de dos números: ____________________
   d) La raíz cuadrada de un número aumentada en dos unidades: ____________________
   e) La raíz cuadrada de un número aumentado en dos unidades: ____________________
   f) El cuadrado de un número disminuido en cinco unidades: ____________________
   g) El triplo de un número más la raíz cuadrada de otro número: ____________________
   h) La raíz cuadrada de la diferencia de dos números al cuadrado: ____________________
   i) Ramiro compró una mochila y tres libretas, por las que pagó $350.00. ____________________
   ____

2. Escribe tres oraciones en lenguaje natural (Ln) y reescríbelas en lenguaje matemático (Lm).
   a) Ln: ____________________
   Lm: ____________________
   b) Ln: ____________________
   Lm: ____________________
   c) Ln: ____________________
   Lm: ____________________

Actividad formativa 1.4

Ingresa al código QR 1.1 y juega con la actividad que se presenta, anota el tiempo que tardas en resolverla en un primer momento y comparte tus resultados:

QR. 1.1. Lenguaje matemático y lenguaje natural. *Fuente:* Parzibyte 2024.

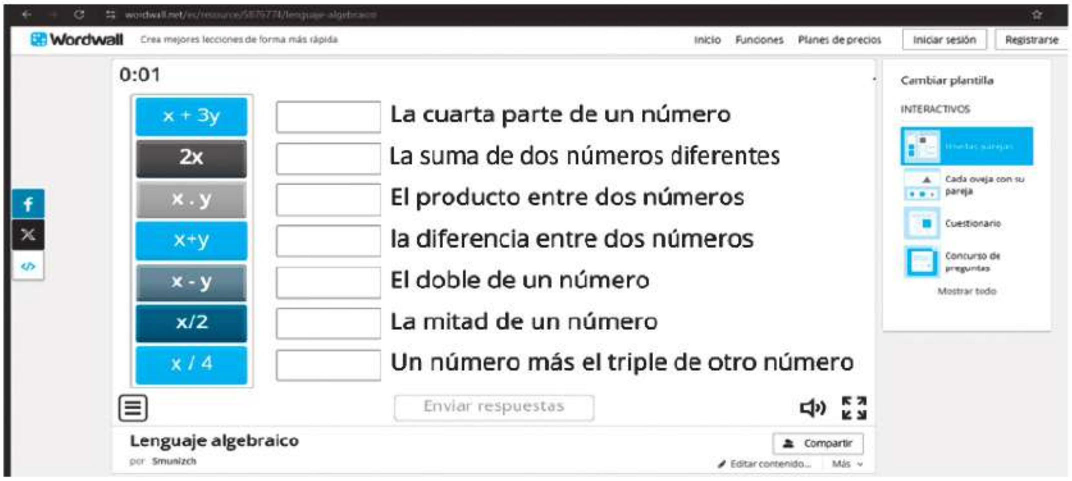


Figura 1.1. Traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático. *Fuente:* Wordwall (Smunizch, 2024).

A pesar de que estamos familiarizados con letras y símbolos matemáticos como el "=", la letra "*x*" para las incógnitas, la cruz "×" para el producto y muchos otros, estos no siempre se utilizaron para escribir ecuaciones y enunciados.

Por ejemplo, los antiguos textos árabes y egipcios de matemáticas apenas contenían símbolos, y sin ellos, ya podemos imaginar lo extensos que debían ser.

Sin embargo, fueron los mismos matemáticos musulmanes quienes comenzaron a desarrollar el lenguaje algebraico desde la Edad Media. Pero fue el matemático y criptógrafo francés François Viete (1540-1603) el primero, que se sepa, en escribir una ecuación usando letras y símbolos.

Algún tiempo después, el matemático inglés, William Oughtred escribió un libro que publicó en 1631, donde hacía uso de símbolos como la cruz para el producto y el símbolo de proporcionalidad $\propto$, que aún se emplean en la actualidad.

Con el correr del tiempo y el aporte de muchos científicos, se fue desarrollando toda la simbología que se maneja hoy en día en las escuelas, universidades y distintos ámbitos profesionales.

Para conocer más sobre el origen de algunos de los símbolos matemáticos puedes entrar al código QR 1.2.

QR. 1.2. Origen de algunos símbolos matemáticos. *Fuente:* Parzibyte 2024.

Actividad formativa 1.5

Completa la siguiente tabla, escribiendo en el lado en blanco.

Lenguaje natural o común	Lenguaje matemático
Suma de dos números cualesquiera.	
	$x \cdot y$
Cociente entre dos números.	
	$(a + c)^2$

Lenguaje natural o común	Lenguaje matemático
	$c^2 = a^2 + b^2$
La diferencia de b al cuadrado con c al cuadrado.	
El doble de un número.	
	$3a^2$
El cubo de un número.	
	$2x + y^3$
Producto de dos números negativos.	
	$2x + x^2$
La suma de tres números consecutivos.	
	$(x - y)^2$

Actividad formativa 1.6

Retomemos el ejemplo del abuelo de Camila planteado al inicio de la progresión sobre la compra de las llantas para el auto. Si se le llama x al precio de una llanta, expresa en lenguaje algebraico:

1. El precio ya rebajado de una llanta con el 35% de descuento: ______________________________
2. El precio de comprar cuatro llantas, cada una con el 35% de descuento: ____________________
3. El precio de comprar seis llantas ya que están en oferta de 3×2: ___________________________

Evaluación formativa 1.1

1. Expresa en lenguaje algebraico, las siguientes situaciones planteadas en lenguaje natural:
   a) Tres veces la raíz cuadrada de un número cualquiera. ______________________________
   b) Si a la edad de Pedro se le aumentan 5, este tendrá el doble de edad que Julia. ____________
   ____
   c) El ahorro de mis padres se incrementó en una cuarta parte. ___________________________
   d) Imagina que estás ahorrando para comprar un nuevo teléfono. Decides ahorrar una cantidad fija de dinero cada semana, y hasta ahora has ahorrado durante cinco semanas. Tu hermano también está ahorrando, pero ha decidido ahorrar el doble de la cantidad que tú ahorras cada semana. Expresa matemáticamente la cantidad de dinero que ha ahorrado tu hermano.
   ____
   e) Si el euro se encuentra a un precio de $21.56 pesos mexicanos, ¿qué expresión algebraica permite convertir pesos mexicanos a euros? ______________________________

2. Escribe en lenguaje común un significado para las siguientes expresiones en lenguaje matemático:
   a) $a + a/3$ ____
   b) $s - 0.15s$ ____
   c) $3d + 200$ ____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: _______________ Grupo: ___ Turno: ___

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 1. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconocí que el lenguaje matemático es más preciso y riguroso en comparación con la flexibilidad del lenguaje natural. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

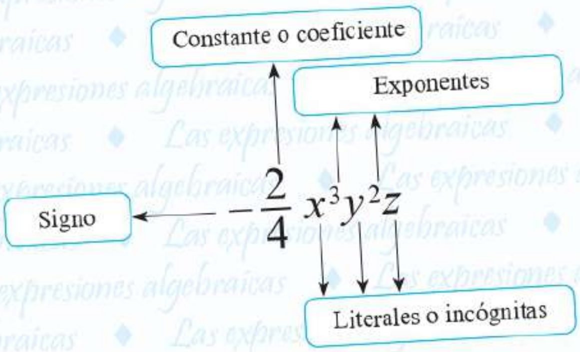
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 1 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Reconoció que el lenguaje matemático es más preciso y riguroso en comparación con la flexibilidad del lenguaje natural. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Las expresiones algebraicas



Progresión de aprendizaje 2

Revisa algunos elementos de la sintaxis del lenguaje algebraico considerando que en el álgebra buscamos la expresión adecuada al problema que se pretende resolver (utilizamos la expresión simplificada, la expresión desarrollada de un número, la expresión factorizada, productos notables, según nos convenga).

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno, algebraico e iconográfico.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGÓSTICA 2.1

Busca el término matemático correspondiente a cada concepto que aparece en el crucigrama. (Figura 2.1)

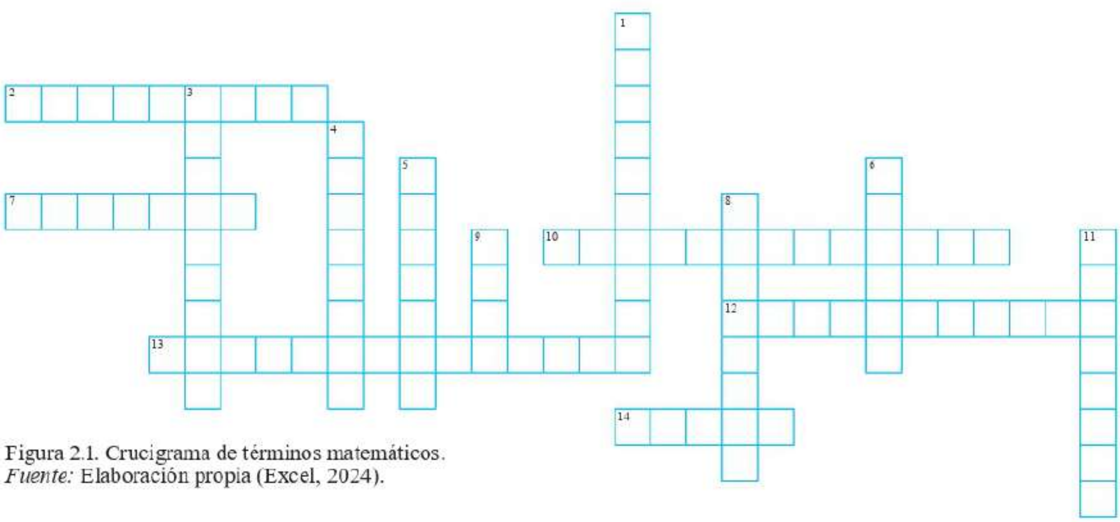


Figura 2.1. Crucigrama de términos matemáticos.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Horizontal

2. Son aquellos números que se obtienen al multiplicar un número *n* por cualquiera de los números naturales.
7. Expresión compuesta de dos términos algebraicos unidos por los signos (+) o menos (–).
10. Se define como la descomposición de una expresión matemática en forma de multiplicación.
12. Proceso matemático que sirve para separar y clasificar las unidades de un número cifra por cifra.
13. Consiste en escribir de la forma más sencilla posible términos semejantes, combinándolos y reduciendo la expresión a su forma más básica.
14. Operación que consiste en sacar, recortar, empequeñecer, reducir o separar algo de un todo.

Vertical

1. Sirven para dar prioridad a las operaciones que están dentro de ellos.
3. Expresión algebraica compuesta por la suma de dos o más términos.
4. Expresión algebraica compuesta de tres términos unidos por los signos más (+) o menos (–).
5. Expresión algebraica que consta de un solo término.
6. Números naturales que pueden dividir exactamente a otro número.
8. Resultado de realizar la operación matemática de multiplicación.
9. Operación matemática que resulta al reunir en una sola varias cantidades.
11. Expresiones que se componen de cuatro elementos: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Banco de respuestas:

Múltiplos, binomio, polinomio, simplificación, trinomio, monomio, suma, agrupación, factorización, producto, resta, descomponer, factor, términos. (Colocarlas dentro del crucigrama)

¿Imaginas cómo sería el universo si no hubiera movimiento? La ley que permite entender las causas del movimiento es la segunda ley de Newton la cual dice que:

> "*La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él e inversamente proporcional a la masa*".

¿Qué significa la expresión anterior y cómo puede expresarse en lenguaje matemático?

Significa que para que un objeto se mueva rápidamente debes aplicarle mucha fuerza, pero también, que la rapidez con la que se mueve el objeto dependerá de qué tan liviano o pesado es. En esta ley interactúan tres elementos: fuerza (F), aceleración (a) y masa (m) y se expresa de la siguiente forma:

$$F = ma$$

Las fórmulas que utilizamos en la física, la química o en las matemáticas contienen números y letras. Observa algunos ejemplos:

$$v = d/t \qquad H_2O \qquad A = l \cdot l = l^2 \qquad P = l + l + l + l = 4l$$

En ellas se aprecian combinaciones de números y letras que dan un significado en lenguaje matemático a lo que representan del lenguaje natural o común.

Expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas son combinaciones de números (constantes) y letras (variables) que representan cantidades desconocidas y que aparecen relacionados con uno o más signos de las operaciones aritméticas (+, –, ×, ÷, $\sqrt{\ }$, potenciación). En una expresión algebraica no aparece el signo de igualdad (=).

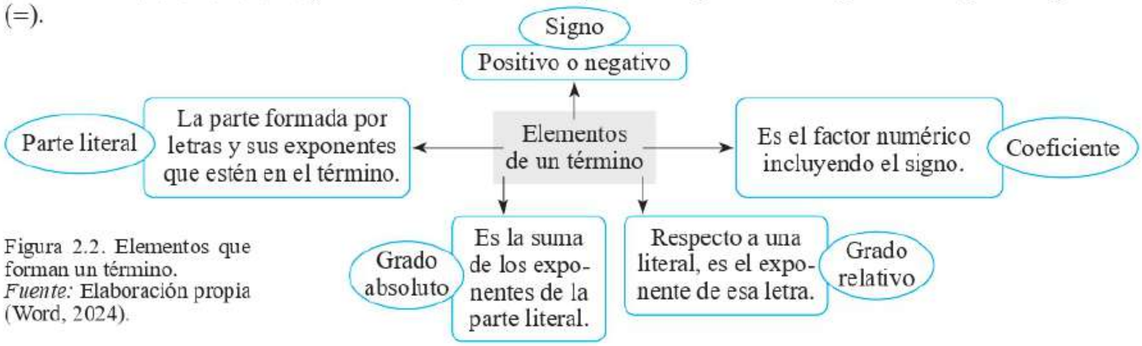


Figura 2.2. Elementos que forman un término.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

En álgebra se llama **término algebraico** a toda expresión algebraica cuyas partes no están separadas por los signos (+ o –) como se muestra en la Figura 2.2.

Por ejemplo:

- En el término algebraico: $-6xy^2$, su signo es negativo; el coeficiente es **–6**; la parte literal es xy^2; el grado relativo a la literal x es 1; el grado relativo a la literal y es 2, el grado del término algebraico es $1 + 2 = 3$.
- En el término algebraico: $6xy^{-2}$, su signo es positivo; el coeficiente es 6; la parte literal es xy^{-2}; el grado relativo a la literal x es 1; el grado relativo a la literal y es –2, el grado del término algebraico es $1 - 2 = -1$.

En particular, un **monomio** es un término algebraico en el que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto y potencias de exponente no negativo. Por ejemplo, $2x^2y^3z$ es un monomio, pero $2x^2y^{-3}z$ no lo es.

Actividad formativa 2.1

1. Coloca en los espacios vacíos los nombres correspondientes a los elementos del término algebraico que aparece en la Figura 2.3.

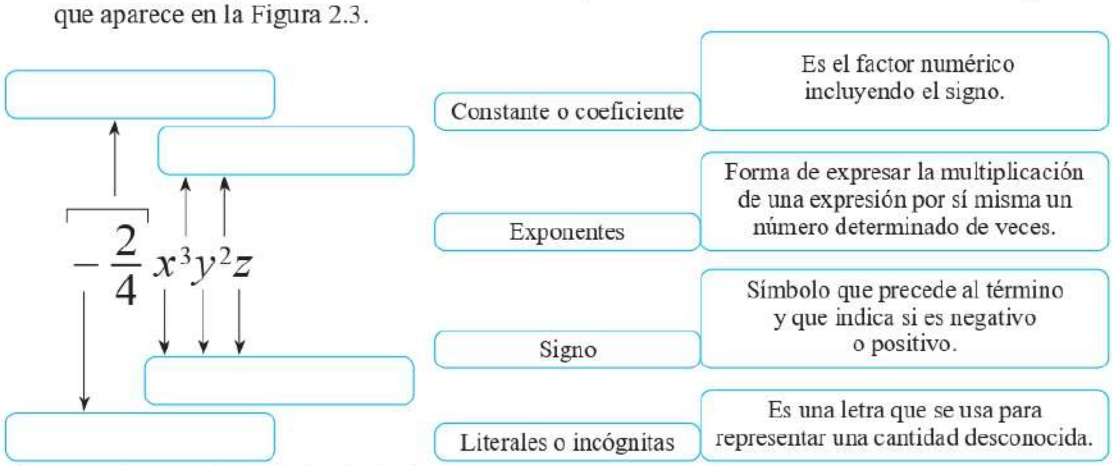


Figura 2.3. Elementos de un término algebraico.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

2. Escribe dos fórmulas que consideres importantes en donde aparezcan literales. ________________
____

   a) Describe qué representa cada una de las letras en tus fórmulas anteriores. ________________
   ____
   ____

   b) Argumenta por qué las consideras de importancia. ________________________________
   ____
   ____
   ____

3. Completa la siguiente tabla.

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal	Grado relativo de cada variable	Grado absoluto
$-3xy^2z$					
$2xyz^3$					

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal	Grado relativo de cada variable	Grado absoluto
$\frac{5}{4}ab^4$					
$-\sqrt{4}x^6y^5$					
$\sqrt{\frac{16}{4}}a^2bc^3$					

Simplificación de expresiones algebraicas

Los términos algebraicos que poseen las mismas partes literales y exponentes se les conoce como **términos semejantes**. Son términos semejantes, por ejemplo:

$4x, -7x$ $\qquad$ $12x^3y^4, \frac{-x^3y^4}{4}$ $\qquad$ $5\,a^2b^3c, a^2b^3c$

La **reducción de términos semejantes** es una operación algebraica que resulta de las relaciones aritméticas entre los términos semejantes, permitiendo convertir dos o más términos en una sola expresión, es decir, para reducirlos se realiza la suma algebraica de sus coeficientes de acuerdo con la ley de los signos para la suma, y a este resultado se le coloca la parte literal en común.

Por ejemplo, observa la reducción de términos semejantes en la siguiente expresión:

$$\mathbf{2a} - b - \mathbf{5a} + 5b$$

Términos semejantes:

$2a, -5a$

$-b, 5b$

Operaciones:

$2a - 5a = -3a$

$-b + 5b = 4b$

Luego $\mathbf{2a} - b - \mathbf{5a} + 5b = \mathbf{-3a} + 4b$.

De igual forma, $25p^3 - 6pq^2 - 10p^3 + 8pq^2 - q^3 = 25p^3 - 10p^3 - 6pq^2 + 8pq^2 - q^3$

$= 15p^3 + 2pq^2 - q^3$

Actividad formativa 2.2

Simplifica a su mínima expresión las siguientes expresiones algebraicas.

1. $4ax - 10bx - 9bx - 4ax =$
2. $\frac{2}{3}mn - \frac{1}{6}mn + \frac{1}{2}m^2n^2 - \frac{3}{4}mn + m^2n^2 =$
3. $5xy^2 + 3x^2y + 2xy^2 + 3 + 2x^2y + 5 + 3 + 4xy^2 =$
4. $6ab^2 - 2a^2b + 5ab^2 - ab - a^2b + 2ab^2 + 2ab + 3a^2b =$
5. $xyz^2 - 2x^2yz + 5xy^2z + 2xyz^2 - 2x^2yz + 3xy^2z + 4x^2yz =$

Las expresiones algebraicas formadas por sumas, restas y multiplicaciones de dos o más monomios se les llama **polinomios**; son aquellas expresiones algebraicas donde las variables solo tienen exponentes enteros no negativos y se le llama **grado del polinomio** al mayor de los grados de los términos que lo componen. De acuerdo con la cantidad de elementos que posee el polinomio, se les denomina, en algunos casos, de forma particular:

- binomios, cuando tienen dos términos.
- trinomios, si constan de tres términos.

Son ejemplos de polinomios:

- $x^2 - y^2$, es un binomio; en este caso de dos variables y de segundo grado porque los dos monomios que lo integran son de grado dos.
- $m^3 + 2m^3n + n^2$, es un trinomio en dos variables y de grado cuatro, que es el grado que resulta de la suma de los exponentes de m y n en el monomio $2m^3n$.
- $3x^4 + x^3 - 2x^2 + 0.5x - 3$, es un polinomio de cuarto grado en una variable.

Productos notables

Cuando se trabaja con expresiones algebraicas, a menudo encontramos situaciones en las que tenemos que multiplicar dos o más expresiones entre sí y en algunos casos podemos encontrar atajos para llegar al resultado siguiendo reglas fijas, sin necesidad de realizar la multiplicación paso a paso. Estos casos son llamados productos notables y constituyen una herramienta útil para multiplicar expresiones algebraicas de manera rápida y sencilla, aplicando reglas simples basadas en la propiedad distributiva y de la potenciación.

La propiedad distributiva simbólicamente la podemos expresar como:

$a(b + c) = ab + ac$, con a, b y c números reales

(Observa que "a" queda como factor común de los términos.)

Ejemplo formativo 2.1

Aplica la propiedad distributiva del producto respecto a la suma en las siguientes expresiones y simplifica el resultado.

1. $2(y + 5)$ 2. $xy(2x - 3)$ 3. $(a + b)(a - b)$

Al aplicar la propiedad distributiva se obtiene:

1. $2(y + 5) = 2 \cdot y + 2 \cdot 5 = 2y + 10$
2. $xy(2x - 3) = xy \cdot 2x - xy \cdot 3 = 2x^2y - 3xy$
3. $(a + b)(a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

Actividad formativa 2.3

Aplica la propiedad distributiva para calcular los siguientes productos.

1. $5(y - 2) =$
2. $x(x + 3) =$
3. $(a - b)(a + b) =$
4. $-7(2x - 4) =$

Supón ahora que quieres calcular el cuadrado de un binomio, es decir $(a + b)^2$ y para ello te basas en lo que significa la potencia dos y la propiedad distributiva:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Así, se obtiene una expresión que es común recordar, como una regla, cuando se trata de elevar un binomio al cuadrado u otros casos como se muestran en la tabla:

Ejemplos de productos notables		
Binomios al cuadrado		Binomios conjugados
$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$	$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
El cuadrado de la suma de dos números es igual a la suma de los cuadrados de cada número más el doble producto de ellos.	El cuadrado de la diferencia de dos números es igual a la suma de los cuadrados de cada número menos el doble producto de ellos.	El producto de la suma de dos números y de su diferencia es igual al cuadrado del primer número menos el cuadrado del segundo número.

Existe una relación muy interesante entre los productos notables y su interpretación geométrica, relacionada con el área de figuras geométricas, como puedes apreciar en el código QR 2.1.

QR. 2.1. Demostración geométrica de productos notables. *Fuente:* Parzibyte 2024.

Otros productos indicados también constituyen productos notables, ya que pueden obtenerse a través de reglas de formación del resultado sin necesidad de realizar los productos paso a paso y que de manera general pueden aplicarse con expresiones equivalentes, permitiendo simplificar las operaciones algebraicas. Un resumen de estos productos notables aparece en la siguiente Tabla 2.1.

Producto notable	Expresión
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Suma por diferencia	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Binomios con término común	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + b^2$
Binomios de la forma $(\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b})$	$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
Cubo de un binomio	$(a \pm b)^3 = \mathrm{a}^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Binomio por un trinomio	$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Tabla 2.1 Productos notables.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Ejemplo formativo 2.2

Calcula aplicando los productos notables.

1. $(x+2)^2$ 2. $(x-2)(x+2)$ 3. $(x+1)^3$ 4. $(x-1)(x^2+x+1)$.

Resolución:

Identifica en cada caso la regla que corresponde al producto notable.

1. $(x+2)^2 = x^2 + 4 + 2 \bullet 2 \bullet x = x^2 + 4x + 4$ (Binomio al cuadrado)
2. $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ (Suma por diferencia)
3. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ (Cubo de un binomio)
4. $(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$ (Binomio por un trinomio)

Actividad formativa 2.4

Aplica las reglas de los productos notables para obtener el resultado de:

1. $(x-3)^2 =$ ______
2. $(x-4)^3 =$ ______
3. $(x+2)(x-2) =$ ______

4. $(x - 4)(x + 4) =$ ____________________
5. $(x + 1)(x^2 - 2x + 1) =$ ____________________

Factorización de polinomios

En forma análoga a la que un número natural puede expresarse como el producto de varios factores, existen procedimientos con los cuales se puede descomponer un polinomio en factores más simples, proceso que se le llama **factorización de polinomios**.

La factorización permite descomponer un polinomio en factores o expresiones más básicas, facilitando así las operaciones algebraicas y permite una mayor comodidad en los cálculos.

Una forma simple de factorización es el **factor común**, cuando en una expresión algebraica pueden identificarse elementos que aparecen en todos los términos y entonces estos se extraen de cada término como un factor que multiplica.

Por ejemplo, en la expresión $2ab^2 - 4a^2b + 2ab$, puedes ver como $2ab$ se repite, $2abb - 2 \cdot 2aab + 2ab$, de manera que es un factor común y se puede escribir

$$2ab^2 - 4a^2b + 2ab = 2ab(b - 2a + 1).$$

De igual manera, los productos notables, vistos en sentido contrario a como se aplicaron, constituyen la factorización de los polinomios a los que dieron origen. Por ejemplo, $a^2 + 2ab + b^2$ recibe el nombre de trinomio cuadrado perfecto, se puede factorizar como $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ que como puedes ver es la forma contraria en que se desarrolló el producto notable del binomio al cuadrado. (Ver Tabla 2.2).

Ejemplo formativo 2.3

En la siguiente tabla puedes ver a través de ejemplos cómo se factorizan algunos tipos de polinomios, haciendo uso de los productos notables.

Factor común	Diferencias de cuadrados
$\mathbf{3x^2 + 6x}$ Se identifica el factor común entre los términos: $\mathbf{3x}$ Por lo tanto, el polinomio $\mathbf{3x^2 + 6x}$ factorizado es: $\mathbf{3x^2 + 6x = 3x(x + 2)}$	$\mathbf{z^2 - 9}$ Se factoriza como el producto del binomio de una suma por su diferencia. Por lo tanto, $z^2 - 9$ se factoriza como: $\mathbf{z^2 - 9 = (z + 3)(z - 3)}$ De igual forma: $64x^2 - 36y^2 = (8x + 6y)(8x - 6y)$ $\sqrt{64x^2} = 8x$ $\sqrt{36y^2} = 6y$
Trinomio cuadrado perfecto	**Trinomio cuadrado de la forma $(x^2 + px + q)$**
$\mathbf{x^2 + 6x + 9}$ Como $6x = 2 \cdot 3x$ y $3 = \sqrt{9}$, para factorizar se extraen las raíces cuadradas del primero y último término y se colocan como un binomio elevado al cuadrado. Por lo tanto, $x^2 + 6x + 9$ se factoriza como: $\mathbf{x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2}$	$\mathbf{x^2 + px + q = (x + a)(x + b)}$. Se factoriza como el producto de dos binomios con término común x, donde a y b son dos números cuya suma algebraica sea p y cuyo producto sea q, es decir, $a + b = p$ y $a \cdot b = q$. Ejemplos: $x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$, con $(2 + 3 = 5; 2 \cdot 3 = 6)$ $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$, con $(-4 + 2 = -2; -4 \cdot 2 = -8)$

Tabla 2.2 Factorización de polinomios.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

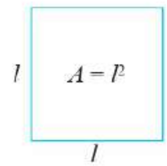
Actividad formativa 2.5

Halla la descomposición factorial de:

1. $x^3 - x =$ ____________________ 2. $x^2y^3 - 5x^3y^2 =$ ____________________
3. $9s^2 - 4 =$ ____________________ 4. $r^2 - 10r + 25 =$ ____________________
5. $2x^2 - 12x + 18 =$ ____________________ 6. $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 =$ ____________________
7. $s^2 - 10s + 21 =$ ____________________ 8. $x^2 - 24x - 25 =$ ____________________

Ejemplo formativo 2.4

Si el área de un cuadrado es $9x^2 + 6xy + y^2$, ¿cuál es la expresión para su lado?



El área de un cuadrado como conoces es $A = l^2$, donde l es la longitud del lado del cuadrado.

Si analizas el trinomio puedes observar que:

$$9x^2 + 6xy + y^2 = (3x)^2 + 2(3x)y + y^2$$

Por lo que es un trinomio cuadrado perfecto y se puede factorizar como:

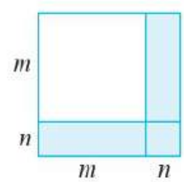
$$9x^2 + 6xy + y^2 = (3x + y)^2$$

De donde se obtiene que la expresión para el lado del cuadrado es $l = 3x + y$

EVALUACIÓN FORMATIVA 2.1

Contesta las siguientes preguntas en base a lo aprendido en esta progresión.

1. ¿Cuál es el resultado de multiplicar $(x + 3)(x - 3)$? ____________________
2. ¿Cuál es el área de un cuadrado que mide $x + 7$ de lado? ____________________
3. Factoriza el siguiente trinomio $x^2 - x - 12$: ____________________
4. Un terreno rectangular mide 5 metros más de largo que de ancho. Si su área es igual a 84 m², ¿cuáles son sus dimensiones?
5. Observa la figura de la derecha, ¿cuál es el área de la parte sombreada? Calcúlala de dos maneras diferentes.



6. Un agricultor quiere realizar el mapeo de su terreno y lo ha representado mediante símbolos matemáticos. Si en el plano, tiene representado el largo del terreno como $(x + 8)$ y el ancho de este con los símbolos $(x + 5)$, ¿cuál sería la expresión para el área de dicho terreno?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ___________________________ Plantel: _________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 2. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Realicé cálculos utilizando los productos notables y la factorización de polinomios en la resolución de problemas. (M1-C1)			
Compartí mis métodos de trabajo sobre los procesos que utilicé en la solución de problemas. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 2 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Realizó cálculos utilizando los productos notables y la factorización de polinomios en la resolución de problemas. (M1-C1)			
Compartió sus métodos de trabajo sobre los procesos que utilizó en la solución de problemas. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Resolución de problemas utilizando el lenguaje algebraico

El gavilán y las 100 palomas

Adiós mis 100 palomas dijo un gavilán a una parvada de palomas. No somos 100 dijo una paloma, si sumamos las que somos, más tantas como las que somos; más la mitad de estas, más la cuarta parte de estas y contigo gavilán somos 100 ¿Cuántas palomas son?


Foto: Susana Rosique

Progresión de aprendizaje 3

Examina situaciones que puedan modelarse utilizando lenguaje algebraico y resuelve problemas en los que se requiere hacer una transliteración entre expresiones del lenguaje natural y expresiones del lenguaje simbólico del algebra.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGÓSTICA 3.1

Escribe en cada paréntesis la letra de la expresión algebraica que mejor representa cada oración.

Oración	Expresión algebraica
( ) La edad de Aarón es el doble que la de Brandon, y ambas edades suman 36.	a) $A = \frac{b \cdot h}{2}$
( ) El precio de una camisa menos su quinta parte es de 250 pesos.	b) $4x + 5 = 3(x + 5)$
( ) La mitad de la suma de dos números es 48.	c) $x + 2x = 36$
( ) El cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.	d) $x - \frac{x}{5} = 250$
( ) La edad de un padre actualmente es el cuádruplo de la edad de su hijo y dentro de cinco años será el triplo.	e) $x + (x + 1) + (x + 2) = 156$
( ) El doble de un número excede en 48 a la mitad del mismo número.	f) $x - y = 15$

Continúa en la siguiente página...

( ) El largo de un terreno rectangular es el doble del ancho y su perímetro es 105 m.	g) $c^2 = a^2 + b^2$
( ) La suma de la cuarta y quíntuple parte de un número equivale al triple del mismo número disminuido en 15.	h) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
( ) La suma de tres números consecutivos es 156.	i) $\frac{a + b}{2} = 48$
( ) La suma de dos números multiplicada por su diferencia es igual a la diferencia de sus cuadrados.	j) $2x = \frac{x}{2} + 48$
( ) El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura.	k) $\frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 3x - 15$
( ) La diferencia de dos números es 15.	l) $2(2x) + 2(x) = 105$

Recursos tecnológicos

Si lo prefieres, puedes realizar tu evaluación diagnóstica usando el siguiente código QR 3.1.

QR 3.1. Evaluación diagnóstica.
Fuente: Parzibyte 2024.

Viaje en el tiempo

La historia de la modelación algebraica se remonta a la antigua Babilonia, donde se utilizaban tablillas de arcilla para resolver problemas matemáticos, las cuales son un ejemplo de modelación algebraica. En estas tablillas se encontraron problemas matemáticos que involucraban ecuaciones lineales y cuadráticas, así como métodos para resolverlos. Los antiguos babilonios utilizaban un sistema posicional de numeración y técnicas algebraicas para resolver problemas relacionados con el comercio, la construcción y la administración.

El uso de la modelación algebraica sentó las bases para el desarrollo posterior del álgebra y su aplicación en una amplia gama de campos.

Un estudiante puede emplear la modelación algebraica al momento de planear un viaje. Puede usar ecuaciones para calcular el tiempo de llegada en función de la velocidad y la distancia, o bien para determinar el costo total considerando diferentes gastos como combustible, casetas de cobro, alimentación y hospedaje. También puede utilizar la modelación algebraica para analizar datos financieros, como el crecimiento de inversiones a lo largo del tiempo.

Imagina poder aplicar la modelación algebraica en el entorno escolar al analizar el consumo de energía eléctrica de tu escuela, donde en compañía de tus compañeros recopiles datos sobre el consumo de electricidad durante diferentes períodos de tiempo, como meses o años, y luego usar esa información para crear un modelo algebraico que represente el consumo de energía a lo largo del tiempo.

Con este modelo, puedes predecir el consumo futuro, identificar tendencias y patrones, y proponer estrategias para optimizar el uso de la energía eléctrica en la escuela. Esta actividad no solo te permite aplicar conceptos algebraicos, sino que también te ayuda a comprender la importancia de la eficiencia energética y la sostenibilidad en tu entorno escolar.

¿Te gustaría lograrlo?

Sabías que...

La capacidad de representar situaciones reales mediante ecuaciones y expresiones algebraicas nos permite comprender y predecir fenómenos de una manera más precisa y eficiente.

Actividad formativa 3.1

Contesta las siguientes interrogantes. Sugerencia, consulta las inteligencias artificiales.

1. ¿Qué entiendes por modelación matemática? ______________________________

2. ¿Para qué se utiliza? ______________________________

3. ¿De qué manera utilizarías la modelación matemática en tu vida diaria? ______________________________

4. Plantea una situación o problemática y obtén su expresión algebraica. ______________________________

Como ya habrás podido apreciar, el uso del lenguaje algebraico es muy útil cuando se necesita resolver problemas donde se requiera de relaciones matemáticas y se presenten valores desconocidos o variables.

Actividad formativa 3.2

Elige la expresión algebraica que representa el problema descrito.

1. María acude al dentista para una evaluación diagnóstica, la cual tiene un costo de $500.00, al finalizar su consulta el doctor le dice que necesita realizarse una limpieza, por la cual cobra $20.00 por minuto.

   a) $500x + 20$ b) $500 + 20x$ c) $500 - 20x$

2. Marcos produjo el doble de toneladas de maíz que Antonio y Carlos el doble de Marcos, entre todos hicieron una producción de 240 toneladas.

   a) $x + 2x + 3x = 240$ b) $x + 2x + 4x = 240$ c) $3x + x = 240$

3. José tiene $230.00 en monedas de $5.00 y $10.00. Él cuenta con dos monedas más de $10.00 que de $5.00.

   a) $10(x + 2) + 5x = 230$ b) $10x + 5(x + 2) = 230$ c) $230(x) = 10 + 5(x + 2)$

4. María vendió pasteles durante tres días, el segundo día vendió el doble de lo que vendió el primer día y el tercer día vendió el triple de lo que vendió el primer día, en total ganó $240.00.

   a) $3x + x = 240$ b) $x + 2x + 4x = 240$ c) $x + 2x + 3x = 240$

5. Perla fue a la papelería a comprar una libreta y tres plumas y pagó $148.00.

   a) $x + 3y = 148$ b) $3(x + y) = 148$ c) $\frac{x + y}{3} = 148$

El gavilán y las 100 palomas

—Adiós mis 100 palomas, –dijo un gavilán a una parvada de palomas.

—No somos 100, –dijo una paloma–, si sumamos las que somos, más tantas como las que somos, más la mitad de las que somos, y la mitad de la mitad de las que somos, en ese caso, contigo, gavilán, seríamos 100.

¿Cuántas palomas son?

Figura 3.1. Palomas.
Fuente: Susana Rosique.

Actividad formativa 3.3

Encuentra la expresión algebraica que describe los siguientes problemas.

Problemas	Expresión algebraica
Valeria gastó $\frac{1}{3}$ de su salario mensual en un regalo para su mamá. Después, gastó \$700.00 en un vestido. Hasta ese momento ya había gastado la mitad de todo su salario, ¿cuál es el salario de Valeria?	
El área de la puerta del salón de clases mide 2.52 m^2 y su altura es de 2.10 m, ¿cuál es el ancho de la puerta?	
Un triángulo mide 4 m de base y tiene 26 m^2 de área, ¿cuál es la altura del triángulo?	
En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos mide 25°, ¿cuál es la medida del otro ángulo agudo?	
En un terreno de forma rectangular el largo excede en 6 metros al ancho, si el ancho se duplica y el largo disminuye en 8 metros, el área del terreno no varía, ¿cuál es el perímetro del terreno?	

Una vez que has ejercitado la modelación matemática, es decir, traducir expresiones del lenguaje natural al lenguaje matemático, también es importante, a partir de expresiones matemáticas, desarrollar habilidades en diseñar en lenguaje natural situaciones o problemas de la vida cotidiana y/o de algunas ciencias.

Actividad formativa 3.4

Plantea una situación de tu contexto que se ajuste a cada una de las expresiones algebraicas siguientes.

Expresión algebraica	Situación de tu contexto
$2x + y = 20$	
$5a - \frac{b}{2} = 420$	
$4(x + 1) = x$	
$m^2 + n^2$	
$(2x)(4y) = z$	

Cuando tienes que plantear un modelo matemático para resolver un problema donde se presentan uno o más valores desconocidos, se sigue una serie de pasos que permitan comprenderlo y, partiendo de tus conocimientos previos, encontrar el o los valores desconocidos. Para ello, nos basaremos en las cuatro pasos que sugiere George Pólya, sobre la resolución de problemas.

Su método, para resolver problemas, hace uso de los conocimientos previos y de las habilidades del pensamiento, mediante los siguientes pasos:

Paso 1. Comprender el problemas

Para resolver un problema es necesario comprender bien su enunciado, lo que significa leer y comprender completamente el problema, identificar la información dada con los datos necesarios para resolverlo, lo que es desconocido y se necesita encontrar. Es importante responderse preguntas como:

- ¿Cuál es la incógnita?
- ¿Cuáles son los datos?
- ¿Cuál es la condición?

- ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita?

Paso 2. Concebir un plan

En este paso se utilizan los conocimientos previos, la intuición y creatividad para elaborar una estrategia con la o las operaciones necesarias para resolver el problema y transcribirlo al lenguaje matemático que permita resolverlo.

En ello y muy relacionado con la comprensión del problema contribuye el hacer una figura auxiliar, una tabla, buscar un patrón de comportamiento de los datos obtenidos, o dividir el problema en partes, entre otras estrategias para lograr el plan de solución.

Paso 3. Ejecutar el plan

En este paso se deben implementar la o las estrategias seleccionadas para solucionar completamente el problema, siguiendo cuidadosamente las reglas, propiedades y secuencias de las operaciones que se ejecuten.

Sabías que...

Figura 3.2. George Pólya. *Fuente:* Instituto de matemáticas UNAM.

George Pólya fue un matemático húngaro, nacido en Budapest en 1887. Desarrolló una amplia variedad de contribuciones al campo de la matemática entre ellas la teoría de la resolución de problemas. Si quieres conocer más sobre su biografía consulta el código QR 3.2.

QR 3.2. Biografías de matemáticos: George Pólya. *Fuente:* Parzibyte 2024.

Paso 4. Visión retrospectiva

En este último paso se tiene la posibilidad de revisar el trabajo y asegurarse de no haber cometido algún error; es importante responderse preguntas como:

- ¿Es la solución correcta?
- ¿La respuesta satisface lo establecido en el enunciado del problema?
- ¿Puedes ver como extender tu solución a un caso general?

Si al resolver los problemas empleas en forma consciente y cuidadosa cada uno de los anteriores pasos, aprenderás a diseñar y poner en práctica estrategias que te permitan alcanzar el éxito.

Veamos un ejemplo de cómo puedes resolver problemas utilizando expresiones algebraicas y basándonos en estos cuatro pasos.

Ejemplo formativo 3.1

Un grupo de alumnos de la Preparatoria Guasave Diurna está trabajando en el desarrollo de un proyecto sustentable que pueda ser replicable por todos los alumnos en diferentes escalas. Consiste en la creación de un huerto escolar con espacios asignados para los diferentes vegetales que se pretenden cultivar.

Para determinar las medidas del huerto y su distribución, se consideraron las especificaciones que se enuncian a continuación:

- El terreno disponible para realizar el huerto mide de largo 36 metros, mientras que su ancho sólo ocupa una tercera parte de éste, ¿cuánto mide de ancho el huerto?

La distribución del huerto quedó de la siguiente manera:

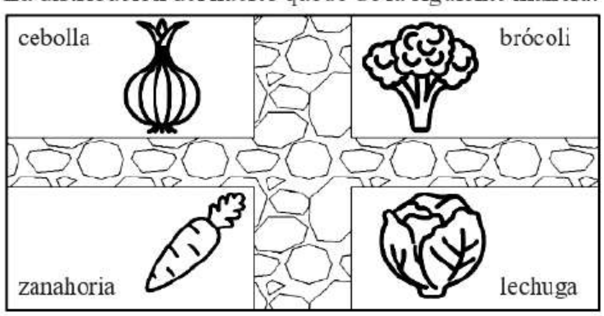


Figura 3.3. Distribución del huerto escolar. *Fuente:* Elena Ruelas (Autodesk ID 2024).

- El pasillo horizontal del huerto tiene un ancho igual a un doceavo $\frac{1}{12}$ del ancho total del huerto, ¿cuánto mide de ancho el pasillo horizontal?
- El pasillo vertical del huerto tiene el doble de ancho del pasillo horizontal, ¿cuánto mide de ancho el pasillo vertical?

Si has encontrado las medidas anteriores, ¿cuáles son las dimensiones del cultivo de cebolla?, si se sabe que los pasillos están perfectamente alineados al centro, como se muestra en la Figura 3.3.

Paso 1. Comprender el problema (identificar los datos)

Datos:

Largo del terreno: 36 metros.

Ancho del terreno: $\frac{1}{3}$ del largo del huerto.

Ancho pasillo horizontal: $\frac{1}{12}$ del ancho del huerto.

Ancho pasillo vertical: el doble de ancho del pasillo horizontal.

Paso 2. Concebir un plan (definir la expresión algebraica que dé solución al problema)

Considerando los valores identificados y las variables correspondientes a cada elemento se hace la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

Lenguaje natural	Lenguaje algebraico
Largo del terreno (x): 36 metros.	$x = 36$
Ancho del terreno (a_1): $\frac{1}{3}$ del largo del huerto.	$a_1 = \frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$
Ancho pasillo horizontal (a_2): $\frac{1}{12}$ del ancho del huerto.	$a_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x}{36}$
Ancho pasillo vertical (a_3): el doble de ancho del pasillo horizontal.	$a_3 = 2 \cdot \frac{x}{36} = \frac{2x}{36} = \frac{x}{18}$

Paso 3. **Ejecutar el plan (resolver la expresión algebraica anterior)**

Largo del terreno: $x = 36$ m $\rightarrow$ x tomó el valor de 36 como se indica en el problema.

Ancho del terreno: $a_1 = \frac{x}{3} = \frac{36}{5} = 12$ m $\rightarrow$ se sustituyó el valor de x.

Ancho del pasillo horizontal: $a_2 = \frac{x}{36} = \frac{36}{36} = 1$ m $\rightarrow$ se sustituyó el valor de x.

Ancho del pasillo vertical: $a_3 = 2 \cdot \frac{x}{36} = \frac{36}{18} = 2$ m $\rightarrow$ se sustituyó el valor de x.

Para resolver la pregunta final sobre las dimensiones del cultivo de cebolla, se hace uso de un esquema como el de la Figura 3.4.

Largo y ancho del cultivo de cebolla:

$$l = \frac{36 - 2}{2} = 17 \text{ m}$$

$$a = \frac{12 - 1}{2} = 5.5 \text{ m}$$

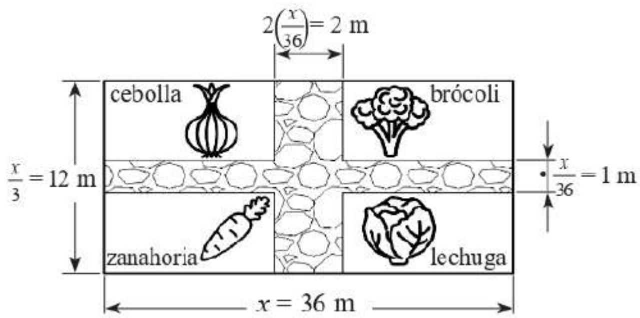


Figura 3.4. Dimensiones del huerto.
Fuente: Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

Paso 4. **Visión retrospectiva (examinar resultados)**

Al hacer la comparación entre lo planteado inicialmente y las medidas obtenidas, puedes concluir que los resultados encontrados son los correctos, ya que, el largo del terreno es 36 metros, su tercera parte es 12 metros, dando como resultado el ancho del terreno; la doceava parte del ancho del terreno es un metro, dando como resultado el ancho del pasillo horizontal y el doble del pasillo horizontal es dos metros, que es el ancho del pasillo vertical.

Ahora puedes responder la pregunta final, ¿cuáles son las dimensiones del cultivo de cebolla?, si se sabe que los pasillos están perfectamente alineados al centro. **Las dimensiones del cultivo de cebolla son 17 m de largo y 5.5 m de ancho.**

Actividad formativa 3.5

Continuando con el Ejemplo formativo 3.1, observamos que se asignó el mismo espacio para sembrar en el huerto dichos vegetales, sin embargo, por el tamaño de cada uno de ellos, las unidades que se pueden sembrar en cada área son diferentes.

1. Determina cuántas unidades se pueden sembrar de cada vegetal, si se sabe que se pueden sembrar 120 unidades de cebollas; las unidades que se pueden sembrar de brócoli para este mismo espacio son iguales a una cuarta parte de las unidades de cebolla; en el caso de las zanahorias, se pueden sembrar el triple de unidades que de brócoli; mientras que, de lechuga, se pueden sembrar $\frac{7}{5}$ del total del brócoli.

   Cebollas:

   Brócoli:

   Zanahorias:

   Lechugas:

2. Una vez conocidas cuántas unidades se pueden sembrar de cada vegetal, es momento de determinar la cantidad de líquido orgánico que se requiere para cada sembradío; toma en cuenta que el sembradío de brócoli (b) requiere de 3000 ml.

   A partir de dicha información completa la siguiente tabla:

Vegetales	Lenguaje común	Lenguaje algebraico	Liquido orgánico requerido (ml)
Cebolla (c)	Una tercera parte de lo que requiere el brócoli.		
Zanahoria (z)	El triple de lo que requiere la cebolla.		
Lechuga (l)	Un sexto de lo que requiere la zanahoria.		

3. Para regar las hortalizas del huerto, los estudiantes compraron 48 m de manguera, para mayor facilidad de riego decidieron cortarla en dos partes, una de ellas es 14 m más larga que la otra.
   a) Determina la expresión algebraica para encontrar la longitud de cada parte.
   b) Determina la longitud de cada una de las partes.

4. Los alumnos pretenden recaudar fondos para el proyecto del huerto escolar, para lo cual proponen hacer una rifa de unos audífonos inalámbricos con un costo de $800.00. La modalidad de la rifa es una lista de números del 1 al 25, los cuales se van a rascar y el costo de cada papeleta es el número que salga.
   a) Determina una expresión algebraica para encontrar la suma total del dinero que se recaudará por cada alumno.

   b) Si son 35 alumnos, ¿cuál es la ganancia suponiendo que se venden todos los números?

EVALUACIÓN FORMATIVA 3.1

Analiza la siguiente situación y determina expresiones algebraicas que te permitan representar cada una de las afirmaciones (una expresión para cada afirmación). Al finalizar desarrolla el procedimiento para llegar a la solución de cada incógnita.

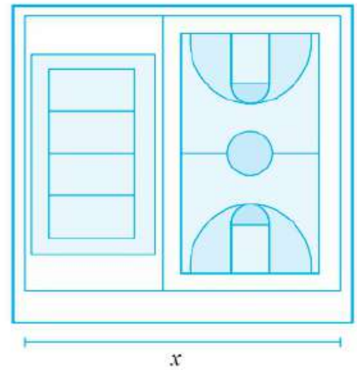


Figura 3.5. Canchas de voleibol y basquetbol.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

1. Las canchas de voleibol y basquetbol de la Preparatoria Guasave Diurna forman un polígono que tiene un perímetro total de 120 metros. Tomando en cuenta que el conjunto forma un polígono cuadrado, ¿cuánto medirá cada lado?

2. El área que cubre el terreno de juego de la cancha de voleibol es igual a una quinta parte del total de los metros cuadrados del conjunto de canchas. ¿Cuánto mide el terreno de juego de la cancha de voleibol?

3. El área de juego de la cancha de basquetbol menos el área de juego de la cancha de voleibol es igual a 240 m^2. ¿Cuál es el área de juego de la cancha de basquetbol?

4. ¿A cuántos metros cuadrados equivalen dos tercios del total del conjunto de las canchas? Demuestra que la suma de las áreas de juego de las canchas de voleibol y basquetbol es igual a dos tercios del total del conjunto.

5. Tomando en cuenta que el piso del conjunto de canchas tiene una superficie de 900 m^2 y un espesor 0.12 m, ¿cuál es el volumen que ocupa en el espacio?
(*Nota*: el espesor es la altura del piso con respecto al suelo).

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________ Plantel: ____________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 3. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué los procedimientos aprendidos en la resolución de problemas. (M2-C1)			
Elaboré expresiones matemáticas para representar cómo resolver problemas, identificando los datos conocidos y los que se requieren determinar. (M2-C3)			
Utilicé adecuadamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural para describir diferentes situaciones. (M1-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 3 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicó los procedimientos aprendidos en la resolución de problemas. (M2-C1)			
Elaboró expresiones matemáticas para representar cómo resolver problemas, identificando los datos conocidos y los que se requieren determinar. (M2-C3)			
Utilizó adecuadamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural para describir diferentes situaciones. (M1-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Relaciones entre números enteros

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Progresión de aprendizaje 4

Explica algunas relaciones entre números enteros utilizando conceptos como el de divisibilidad, el de número primo o propiedades generales sobre este conjunto numérico, apoyándose del uso adecuado del lenguaje algebraico.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 4.1

1. ¿Qué entiendes por divisibilidad? ____

____

2. Un grupo de agricultores quiere dividir una parcela de tierra de 144 hectáreas entre ocho familias. ¿Es posible dividir la tierra en partes iguales para cada familia? _____________ ¿Por qué? _____

____

3. Selecciona la opción correcta:

   I. Número natural mayor que uno, tiene solo dos divisores distintos: uno y sí mismo.
      a) Números enteros
      b) Números primos
      c) Números compuestos

II. Conjunto numérico que abarca los números naturales, el cero y los números negativos y además no tienen parte decimal.
   a) Números enteros
   b) Números primos
   c) Números compuestos

III. Números naturales mayores que uno que tienen más de dos divisores distintos.
   a) Números enteros
   b) Números primos
   c) Números compuestos

¡Bienvenidos al emocionante mundo de los números enteros!

En este fascinante viaje matemático, exploraremos el conjunto de los números enteros. A lo largo de nuestras vidas hemos usado diferentes tipos de números, por ejemplo, para contar objetos, utilizamos los números naturales. Si necesitamos expresar ganancias y pérdidas, movimientos hacia adelante y hacia atrás, cambios en la temperatura, etc. no son suficientes los números naturales. Los números enteros son la clave para dar respuesta a estas interrogantes.

La biblioteca es un lugar donde las historias cobran vida y el conocimiento se expande. En este espacio lleno de libros, cada ejemplar tiene su propio lugar designado, sin embargo, este como cualquier otro edificio necesita reparaciones y mejoras para mantener el lugar en óptimas condiciones. Cuando esto sucede, es necesario encontrar soluciones temporales para almacenar los libros mientras se realizan las tareas de mantenimiento. Para garantizar que los libros estén seguros y accesibles durante este tiempo, es fundamental tener un plan para almacenarlos temporalmente en otro lugar. Aquí entran en juego las operaciones con los números enteros y sus propiedades.

Números enteros

Su origen se remonta a la época de las civilizaciones antiguas, donde se desarrollaron sistemas de numeración simples para contar objetos y representar cantidades. Los números naturales, que son los enteros positivos, fueron los primeros en ser utilizados. Con el tiempo, surgió la necesidad de representar situaciones como deudas, pérdidas o posiciones por debajo de cero. Esta idea de números negativos no fue completamente aceptada inicialmente y tomó tiempo para su desarrollo y aceptación en diversas culturas. Aproximadamente en el siglo XVI llegan a Europa, sin embargo, hasta el siglo XVIII no se generalizó su uso. Los números enteros pueden ser positivos, negativos o cero.

Sabías que...

La letra que se utiliza para identificar su conjunto es la ***Z***. Se utiliza esta letra ya que es la primera letra de la palabra alemana ***Zahlen***, que significa números.

Propiedades de los números enteros

Con los números enteros resolvemos situaciones que se nos presentan cotidianamente, para ello, necesitamos conocer las operaciones que podemos realizar y las propiedades que satisfacen. Sabemos que es un conjunto ordenado, porque sus elementos los podemos ordenar, que es algo que hacemos en la vida real, por ejemplo, comparar precios, estaturas, temperaturas, edades, etc. Con los números enteros podemos realizar las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división (excepto la división por cero). Los números enteros satisfacen las siguientes propiedades (ver la siguiente tabla), donde a, b y c representan números enteros.

Propiedad	Operación	Notación	Significado	Ejemplo
Cerradura	Suma	$a + b \in Z$	La suma de dos números enteros es un número entero.	$6 + 7 = 13$ $-6 + (-3) = -13$
	Multiplicación	$ab \in Z$	El producto de dos números enteros es un número entero.	$(11)(3) = 33$ $(11)(-3) = -33$
Conmutativa	Suma	$a + b = b + a$	El orden al sumar números enteros no afecta el resultado.	$6 + 7 = 7 + 6$
	Multiplicación	$(a)(b) = (b)(a)$	El orden al multiplicar números enteros no afecta el resultado.	$(11)(2) = (2)(11)$
Asociativa	Suma	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Se pueden hacer diferentes asociaciones al sumar y no se afecta el resultado.	$(4 + 6) + 3 = 4 + (6 + 3)$
	Multiplicación	$(a \cdot b)(c) = (a)(b \cdot c)$	Se pueden hacer diferentes asociaciones al multiplicar y no se afecta el resultado.	$[(11)(3)](1) = (11)[(3)(1)]$
Distributiva	Suma respecto a la multiplicación	$(a)(b + c) = (a)(b) + (a)(c)$	El factor se distribuye a cada sumando.	$(6)(4 + 5) = (6)(4) + (6)(5)$
Identidad	Suma	$a + 0 = a$	Todo número entero sumado a 0 se queda igual; el cero es el idéntico aditivo.	$13 + 0 = 13$ $(-13) + 0 = -13$
	Multiplicación	$(a)(1) = a$	Todo número entero multiplicado por 1 se queda igual; el 1 es el idéntico multiplicativo.	$(13)(1) = 13$ $(-13)(1) = -13$
Inversos	Suma	$a + (-a) = 0$	La suma de un número con su opuesto es 0.	$-13 + 13 = 0$ $13 + (-13) = 0$
	Multiplicación	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1,\ a \neq 0$	El producto de un número diferente de cero y su recíproco es 1.	$\left(\frac{1}{6}\right)(6) = 1$ o $(-6)\left(\frac{1}{-6}\right) = 1$

Actividad formativa 4.1

1. En la biblioteca de la preparatoria se tienen que hacer ciertas reparaciones, por lo que es necesario almacenar momentáneamente los libros que en ella se encuentran, se les pide a los alumnos de servicio social que los organicen y cuenten. Se ha decidido almacenarlos en cajas que contengan la misma cantidad de libros y se quiere utilizar no más de ocho cajas. Considerando que se cuenta con 240 libros, ¿de cuántas formas se pueden guardar los libros en las cajas? ____________________
Fundamenta tu respuesta: ____

2. Se les pide a los estudiantes que donen un libro a la biblioteca, algunos alumnos están emocionados por contribuir con esta iniciativa, pero al revisar su presupuesto, se dan cuenta que no tienen suficiente dinero para adquirir algunos libros específicos, por ejemplo, el libro de *Aritmética de Baldor* que cuesta \$449.00 o el libro de *Matemáticas Simplificadas* que tiene un precio de \$1,070.00.

Si un alumno desea donar un libro para actualizar la colección de la biblioteca y solo dispone de \$500.00 en su presupuesto, ¿cuánto dinero le sobraría si va a comprar el libro de *Aritmética de Baldor*? y ¿cuánto dinero le faltaría para comprar el libro de *Matemáticas Simplificadas*? ______

____

____

Divisibilidad

El término ***divisibilidad,*** se refiere a la propiedad que tiene un número entero de dividirse por otro número entero y obtener un resultado también entero. En otras palabras, un número ***a*** es divisible por otro número ***b*** si al dividir ***a*** entre ***b*** el residuo es **cero**. Ello nos lleva al concepto de **divisor**, que es aquel número que está contenido en el primero una cantidad exacta de veces.

Los principios generales de divisibilidad son consecuencia del desarrollo alcanzado por la teoría de los números. Los indios llegaron a conocer la divisibilidad entre 3, 7 y 9. El matemático francés Blas Pascal, propuso las reglas para determinar la divisibilidad entre cualquier número.

Criterios de divisibilidad

La divisibilidad nos permite comprender cómo los números se relacionan entre sí. Existen reglas que nos permiten determinar si un número es divisible entre otro sin necesidad de realizar la división, a estas reglas las llamaremos criterios de divisibilidad, algunos de ellos se muestran en la siguiente tabla:

Divisibilidad	Criterio	Ejemplos
Entre 2	Termina en 0 o en un dígito par.	12, 24, 400, 568
Entre 3	La suma de los valores absolutos de sus dígitos es múltiplo de 3.	27, 600, 1356, 4575
Entre 4	Sus dos últimos dígitos de la derecha son 0 o múltiplo de 4.	124, 416, 568, 6000
Entre 5	Termina en 0 o 5.	10, 25, 500, 755
Entre 6	Se puede dividir simultáneamente entre 2 y entre 3.	24, 36, 180, 282
Entre 7	Separando el último dígito de la derecha, multiplicándolo por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da 0 o múltiplo de 7.	217 → **21**, **7**×2 = 14 −14 7 2058 → **205**, **8**×2=16 −16 189 → **18**, **9**×2=18 −18 0
Divisibilidad	**Criterio**	**Ejemplos**
Entre 8	Sus tres últimos dígitos de la derecha son ceros o múltiplo de 8.	5680, 6512, 7000
Entre 9	La suma de los valores absolutos de sus dígitos es múltiplo de 9.	36, 72, 810
Entre 10	Termina en 0.	50, 170, 1230, 5840

¿Sabías qué? ***El Fuerte fue la primera capital de Sinaloa***

El Fuerte, Sinaloa, es una ciudad con un rico legado histórico que se remonta a la época colonial. Fundada en 1593 por Diego Martínez de Hurdaide, esta ciudad fue un importante centro de producción agrícola y comercial durante siglos. Entre sus productos más reconocidos se encuentran los mangos, famosos por su sabor excepcional y calidad superior.

Actividad formativa 4.2

Don Manuel, un agricultor de El Fuerte, Sinaloa, tiene una huerta de mangos con 150 árboles de mangos "Ataulfo". Cada árbol produce en promedio 220 mangos por temporada. Don Manuel quiere vender sus mangos en cajas de diferentes tamaños: **cajas pequeñas**: 12 mangos cada una, **cajas medianas**: 20 mangos cada una y **cajas grandes**: 30 mangos cada una.

1. ¿Cuántos mangos en total produce la huerta de don Manuel? ______________________________
2. ¿Cuántas cajas pequeñas puede llenar don Manuel con la producción de toda su huerta? ________
   ____
3. ¿El número 33,000 es divisible entre 2, 3, 4, 5, 6, 9 o 10? Fundamenta tu respuesta. ___________
   ____
4. Don Manuel sabe que las cajas pequeñas se venden a $10.00 cada una, las medianas a $15.00 y las grandes a $20.00; si vende 90 cajas, la misma cantidad de cajas de cada tamaño, ¿cuánto dinero ganará en total? ____
5. Suponiendo que don Manuel solo vende cajas grandes, ¿cuántos mangos necesita vender para obtener un ingreso de $5,000? ____

Números primos

Una vez revisadas las propiedades de los números enteros y los principios fundamentales de divisibilidad, es importante conocer que existe un tipo de números mayores que uno, que tienen únicamente dos divisores diferentes y que son enteros positivos (el 1 y el número mismo) conocidos como ***números primos,*** por ejemplo: 2, 3, 5, 7, 11, 29, 37, 97. El número 1 no se considera primo.

> Un número entero $p \geq 2$ es **primo** si sus únicos divisores son **1** y p.

Una de las características de los números primos es que hay una cantidad infinita de ellos, según demostró Euclides en la antigüedad. Además, su terminación es siempre: 1, 3, 7 y 9 (excluyendo de esta regla al 2 y al 5).

Un ***número compuesto*** o no primo, es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y entre el 1, lo es entre otro(s) factor(es), por ejemplo: el 14 es compuesto pues además de ser divisible entre 14 y 1, lo es también entre 2 y 7.

> Un número entero $k \geq 2$ es **compuesto** si **no es primo**.

El ***múltiplo*** de un número es aquel que lo contiene un número exacto de veces, de tal manera que el 14 es múltiplo de 2 ya que el 14 contiene al 2 siete veces.

Existe una forma práctica de obtener los números primos menores que 100. La ***criba de Eratóstenes*** es un algoritmo antiguo que te permite encontrar todos los números primos hasta un límite dado, a través del conocimiento del múltiplo de un número. Es importante señalar que el número uno no cumple con la propiedad de tener únicamente dos divisores enteros positivos, por lo que se excluye de la clasificación y es conocido como ***unidad***.

Actividad formativa 4.3

Desafío de la Criba de Eratóstenes para encontrar todos los números primos entre 1 y 100.

Procedimiento: realiza los pasos descritos a continuación.

1. En la Tabla 4.1 tacha el 1.
2. Comienza por el número 2 y tacha todos sus múltiplos (4, 6, 8, 10, etc.) de la tabla.

3. Encuentra el siguiente número sin tachar en la lista. Este número (3) es primo. Tacha todos los múltiplos (6, 9, 12, 15, etc.) de la tabla.
4. Repite el paso 3 con el siguiente número sin tachar en la tabla. Este número (5) es primo. Tacha todos los múltiplos (10, 15, 20, 25, etc.) de la lista.
5. Continúa repitiendo los pasos 3 y 4 hasta que el cuadrado del número que estás examinando sea mayor que 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Tabla 4.1 Criba de Eratóstenes.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Responde lo siguiente:

1. ¿Cuáles son los primeros 10 números primos? ____________________________
2. ¿Cuántos números primos hay entre 1 y 100? ____________________________
3. ¿Cuál es el mayor número primo que encontraste? ____________________________
4. ¿Por qué no es necesario tachar los múltiplos de un número que ya ha sido tachado? ______ ____________________________
5. ¿Por qué razón se tachó el número 1? ____________________________ ____________________________

Los números primos tienen aplicaciones importantes en la criptografía, teoría de los números y otras áreas de las matemáticas e informática.

Ejemplo formativo 4.1

Cifrado de un mensaje.

En un proyecto de investigación en una clase de matemáticas de bachillerato, se está estudiando la seguridad de la información en la era digital. Se ha descubierto que uno de los métodos de encriptación más utilizados se basa en el uso de números primos. Para comprender mejor este método, el profesor pide a los estudiantes llevar a cabo el siguiente procedimiento para cifrar mensajes entre estudiantes y experimentar con ello esta estrategia tan interesante:

1. Primero, elegimos un número primo p como la clave pública.
2. Para cifrar un mensaje, convertimos cada letra en su valor numérico correspondiente sin considerar la letra $\tilde{N}$ ($A = 1, B = 2, ..., Z = 26$).
3. Luego, multiplicamos cada valor numérico por la clave pública p. Para descifrar el mensaje, dividimos cada valor cifrado por la clave pública p.
4. Por ejemplo, si elegimos $p = 7$ como la clave pública, y queremos cifrar el mensaje "HOLA", haríamos lo siguiente:

H = 8, cifrado: $8 \times 7 = 56$
O = 15, cifrado: $15 \times 7 = 105$
L = 12, cifrado: $12 \times 7 = 84$
A = 1, cifrado: $1 \times 7 = 7$

Entonces, el mensaje cifrado sería: 56, 105, 84, 7.

5. Para descifrar, simplemente dividimos cada valor cifrado por la clave pública 7:

$$56 \div 7 = 8 \text{ (H)}$$
$$105 \div 7 = 15 \text{ (O)}$$
$$84 \div 7 = 12 \text{ (L)}$$
$$7 \div 7 = 1 \text{ (A)}$$

Así, obtenemos el mensaje original “HOLA”.

Actividad formativa 4.4

Responde lo siguiente:

1. Cifra el mensaje “MATES” utilizando la clave pública $p = 7$.

2. Si recibes el mensaje cifrado 42, 70, 98, 105, descífralo utilizando la clave $p = 7$.

3. ¿Por qué es importante que la clave pública sea un número primo en este sistema de cifrado?

Números primos relativos

- Números primos relativos (coprimos) entre sí, son dos o más números que solo tienen un divisor común que es 1, por ejemplo, 8 y 15 porque su único factor común es 1. Observa que para que dos números sean primos entre sí, no necesariamente tienen que ser números primos.
- Números primos relativos entre sí dos a dos, son tres o más números tales que cada uno de ellos es primo con cada uno de los demás, por ejemplo: 8, 9 y 17 porque 8 es primo con 9 y con 17, y 9 es primo con 17.

Así, los números 10, 15, 21 y 16 son primos entre sí, porque el único factor que divide a todos es 1, pero no son primos dos a dos, ya que 10 y 15 tienen como factor común al 5, 15 y 21 tienen como factor común al 3, y 10 y 16 tienen como factor común al 2.

Por lo tanto, si varios números son primos dos a dos, necesariamente son primos entre sí, pero siendo primos entre sí, pueden no ser primos dos a dos.

Teorema fundamental de la aritmética. Todo número entero mayor que uno se puede descomponer en factores primos, conocido como ***descomposición prima***.

La descomposición prima es única, salvo por el orden (***unicidad***). Existe un método para llevarla a cabo, conocido como algoritmo de descomposición en factores primos. Hay diferentes versiones del algoritmo, pero todas se basan en la idea de dividir repetidamente el número por el primo más pequeño que lo divide hasta llegar a 1.

Por ejemplo, vamos a descomponer el número 36:

- Primero veamos si 36 es divisible entre 2 que es el número primo más pequeño.
- Notamos que 36 entre 2 es 18, y buscamos divisibilidad entre 2 que es 9.
- Vemos que 9 ya no es divisible entre 2, por lo que continuamos con el siguiente primo que es 3.
- Así, 9 entre 3 es igual a 3, que es divisible entre 3 y terminamos al llegar a 1.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Por lo tanto, la descomposición prima de 36 es (2)(2)(3)(3).

Para reforzar sobre este tema revisa el código QR 4.1

QR 4.1. Video descomposición de un número en factores primos.
Fuente: Parzibyte 2024.

Actividad formativa 4.5

1. Realiza la descomposición en factores primos de los siguientes números enteros:

24	

42	

60	

81	

2. Escribe la descomposición prima de cada número:

24 = ______________________________ 42 = ______________________________

60 = ______________________________ 81 = ______________________________

EVALUACIÓN FORMATIVA 4.1

1. ¿Cuántos múltiplos de 15 hay entre 25 y 100? ____________
2. Identifica si los siguientes números son primos o compuestos. Justifica tu respuesta.
   a) 119 ____
   b) 573 ____
   c) 333 ____
   d) 149 ____
3. Atendiendo la Tabla 4.1, ¿cuál es el único número primo que es par? ____________________
4. De los 240 libros de la biblioteca se han seleccionado 24 ejemplares para realizar una donación a otra institución. Se ha solicitado enviarlos en cajas que sean todas iguales sin que sobren ni falten libros. Investiga todas las opciones posibles para el envío de los libros. ____________________
   ____
5. Después de separar los libros para la donación se desea empacar los restantes en cajas que contengan 9, 10 o 16 libros. Cuál de las opciones es posible para el empaque. ________________
   ____

   Justifica la respuesta. ____
   ____
   ____
   ____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 4. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Comprendí las relaciones entre números enteros utilizando los conceptos de divisibilidad y de número primo. (M2-C2)			
Compartí mis ideas e intercambié sobre los procedimientos que utilicé en la solución de problemas de divisibilidad. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

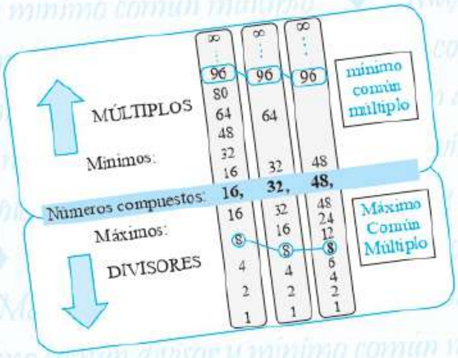
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, concluida la progresión de aprendizaje 4, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Comprendió las relaciones entre números enteros utilizando los conceptos de divisibilidad y de número primo. (M2-C2)			
Compartió sus ideas e intercambió sobre los procedimientos que utilizó en la solución de problemas de divisibilidad. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo



Progresión de aprendizaje 5

Conceptualiza el máximo común divisor (M.C.D.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos números enteros y los aplica en la resolución de problemas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 5.1

Lee detenidamente los siguientes enunciados y escribe en el paréntesis la letra que corresponde a la respuesta correcta:

1. Es un múltiplo de 24. ( )
   a) 8 b) 16 c) 30 d) 48

2. Es un divisor de 8. ( )
   a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3. ¿Cuál es la cuarta parte del área de un salón que mide 6 m por 8 m? ( )
   a) 4 m² b) 8 m² c) 12 m² d) 16 m²

4. ¿Cuál de los siguientes es un número primo? ( )
   a) 4 b) 9 c) 13 d) 24

5. ¿Cuál de los siguientes es un número compuesto? ( )
   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

El máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm) son conceptos esenciales en matemáticas y particularmente en aritmética; tienen aplicaciones prácticas en diversas áreas, desde la simplificación de fracciones hasta la optimización de recursos en ingeniería y tecnología, así como la programación de actividades periódicas, la sincronización de procesos en computación y la resolución de problemas relacionados con la periodicidad de eventos.

Algunos ejemplos de aplicaciones del MCD pueden ser: en el reparto equitativo de objetos entre un grupo de amigos, en la industria del diseño de envases o cajas para empacar alguna cantidad exacta de productos, en la simplificación de proporciones en recetas de cocina, en la optimización de recursos que requieran dimensiones equitativas para su organización y distribución como longitudes o áreas.

Un ejemplo de aplicación del MCD es el siguiente: para plantar diferentes cultivos, se quiere dividir en pequeñas parcelas cuadradas idénticas, una parcela escolar que es un terreno rectangular de 300 metros de largo y 180 metros de ancho, ¿cuál es el tamaño máximo de las parcelas cuadradas que se pueden crear sin desperdiciar terreno?

De las múltiples aplicaciones del mcm, se pueden mencionar algunas como: en los horarios de autobuses, en ciencias naturales se pueden encontrar fenómenos periódicos en el tiempo, en la vida cotidiana se pueden calcular tiempos de coincidencia entre eventos de diferentes frecuencias, ya sea entre personas u otros eventos.

Un ejemplo donde se aplica el mcm es el siguiente: Luis y su papá practican ciclismo en la misma pista, pero sus rendimientos son diferentes. Luis recorre la pista en 54 segundos mientras que su papá tarda sólo 48 segundos. Si ambos inician su recorrido simultáneamente, ¿en cuánto tiempo estarán coincidiendo en el mismo punto de inicio de la pista?

Para encontrar respuestas a estos problemas, es necesario desarrollar procedimientos con algoritmos matemáticos que permitan determinar el MCD y el mcm como parte de la solución correspondiente, los cuales se estudian en esta progresión.

Múltiplos y divisores

En la multiplicación de números $a \times b$, a y b se llaman factores, por ejemplo $5 \times 6 = 30$, 5 y 6 son factores de 30, también 3 y 10 son otros factores de 30. De ahí se dice que 30 es múltiplo de los factores 5 y 6. Estos factores se llaman también divisores de 30, ya que $30 \div 6 = 5$ y $30 \div 5 = 6$.

Con base en lo anterior, se concluye que **un múltiplo** es el número que resulta de multiplicar un número natural (a) por otro número natural (b), incluso él mismo.

Ejemplo formativo 5.1

Si tomamos el número 3, algunos de sus múltiplos son:

$$\begin{aligned} 3 \times 1 &= 3 \\ 3 \times 2 &= 6 \\ 3 \times 3 &= 9 \\ 3 \times 4 &= 12 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Aquí, 3 es el número natural y 1, 2, 3, 4, ..., son otros números naturales. Entonces, 3, 6, 9 y 12, ..., respectivamente son múltiplos de 3. Se puede observar que cualquier número natural es múltiplo de sí mismo, ya que $a \times 1 = a$, para cualquier número natural a; además, los múltiplos de un número natural pueden ser infinitos.

Un múltiplo de un número natural es cualquier número que resulta de multiplicar dicho número natural por otro número natural.

Además, **un divisor** de un número natural es cualquier número que lo puede dividir de manera exacta (sin dejar residuo). Es decir, los factores de un número natural, se llaman también divisores de dicho número.

Ejemplo formativo 5.2

Si tomamos el número 30, sus divisores son: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30 porque:

$$\frac{30}{1}=30,\quad \frac{30}{2}=15,\quad \frac{30}{3}=10,\quad \frac{30}{5}=6,\quad \frac{30}{6}=5,\quad \frac{30}{10}=3,\quad \frac{30}{15}=2,\quad \frac{30}{30}=1$$

Aquí, 30 es el número natural y 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30, son otros números naturales que hacen las divisiones exactas para cada caso, por eso se dice que son divisores de 30. Se puede observar que cualquier número natural tiene como divisor a la unidad y a sí mismo, ya que $a \div 1 = a$ y $a \div a = 1$, para cualquier número natural a; además, los divisores de un número natural son finitos.

Un divisor de un número natural es cualquier número que lo divide de manera exacta, es decir, que su residuo es cero.

Actividad formativa 5.1

Lee, analiza y responde.

1. Escribe tres divisores y tres múltiplos del número 24. ______________________________
2. Determina todos los divisores de 60. ______________________________
3. De los divisores que obtuviste, ¿cuáles son números primos? ______________________________
4. ¿Por qué a los divisores también se les llama factores? ______________________________
5. Determina los primeros 10 múltiplos de los números 4 y 6, luego identifica cuáles múltiplos son repetidos para ambos números.

$M_{(4)} = \{$ ______________________________ $\}$

$M_{(6)} = \{$ ______________________________ $\}$

$M_{(4)}$ y $M_{(6)} = \{$ ______________________________ $\}$

Máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm)

Entre los divisores de un número natural, existe uno mínimo (el uno) y otro máximo (el mismo número natural). El número uno, es un divisor o factor que le pertenece (es común) a todos los números y corresponde al elemento neutro de la multiplicación; sin embargo, no es número primo y no es un factor explícito en los procesos de factorización en números primos de los números.

El máximo común divisor (MCD) de dos números o más, es el número más grande que los divide exactamente sin dejar residuo. Por otro lado, el mínimo común múltiplo (mcm) es el número más pequeño que es múltiplo común de dos números o más. Ambos conceptos son fundamentales en matemáticas y tienen aplicaciones en la resolución de problemas de la vida real, especialmente en álgebra y aritmética.

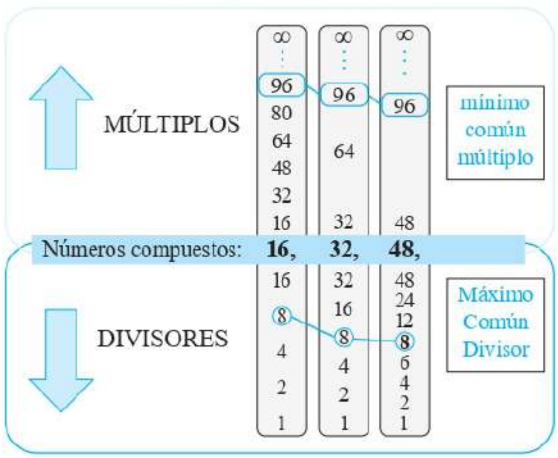


Figura 5.1. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor de números compuestos.
Fuente: Elaboración propia (Power Point, 2024).

En la Figura 5.1. pueden observarse algunas características de los múltiplos y los divisores, como son:

a) Los múltiplos de cualquier número natural, siempre son mayores o iguales a dicho número, además, todos los números tienen infinitos múltiplos.
b) Los divisores de cualquier número natural siempre serán menores o igual a dicho número, son limitados (finitos) y todos los números tienen como mínimo divisor el número uno, pero este no es número primo.

Máximo común divisor (MCD)

Existen muchos problemas donde es necesario determinar lo que en aritmética se conoce como máximo común divisor (MCD).

Ejemplo formativo 5.3

En una fábrica de acero se quiere transportar varillas de 30 y 45 metros de longitud, pero, para facilitar y optimizar el transporte deben cortar las varillas en trozos iguales de la mayor longitud posible. ¿De qué longitud deben cortarse los trozos de varilla?

Para resolver este problema se recomienda lo siguiente:

1. Determinar el conjunto de divisores o factores de 30, que es $D_{(30)} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
2. Determinar el conjunto de divisores o factores de 45, que es $D_{(45)} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
3. Determinar el conjunto de divisores comunes, que es $D_{(30)} \cap D_{(45)} = \{1, 3, 5, 15\}$
4. Identificar el mayor de los divisores comunes (15)
5. Por lo tanto, la longitud máxima a la que deben cortarse las varillas es de 15 metros.

Para determinar el MCD de dos números naturales o más de manera práctica, se recomienda el siguiente algoritmo:

1. Realizar la factorización prima de cada uno de los números, si hay divisores repetidos, expresarlos como potencias.
2. Determinar el MCD multiplicando los factores comunes de dichos números, aplicando los factores con el menor exponente.

   Por ejemplo, el MCD de los números 24, 36 y 60, es:

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$24 = 2^3 \times \mathbf{3}$ $\quad 36 = \mathbf{2^2} \times 3^2$ $\quad 60 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times 5$ $\quad \text{MCD}(24, 36, 60) = 2^2 \times 3 = 12$

Para la aplicación del algoritmo matemático de MCD, se retoma el problema planteado al principio de esta progresión.

Ejemplo formativo 5.4

La parcela escolar es un terreno rectangular de 300 metros de largo y 180 metros de ancho. Si se quiere dividir en pequeñas parcelas cuadradas idénticas para plantar diferentes cultivos, ¿cuál es el tamaño máximo de las parcelas cuadradas que se pueden crear sin desperdiciar terreno?

Resolución:

Se sabe que las dimensiones del terreno son 300 m de largo y 180 m de ancho.

Se pretende dividir el terreno en cuadrados, es decir de lados iguales. Esto indica que se debe calcular el MCD.

Para determinar el MCD de 300 y 180:

1. Realizar la factorización prima de cada uno de los números.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$300 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times 5^2$ $\qquad 180 = \mathbf{2^2} \times 3^2 \times \mathbf{5}$

2. Determinar el MCD multiplicando los factores comunes de dichos números, aplicando los factores con el menor exponente.

   $\text{MCD}(300, 180) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Respuesta: el tamaño máximo de las parcelas cuadradas que se pueden crear sin desperdiciar terreno es de 60 m por lado como se muestra en la Figura 5.2.

1	2	3	4	5	60 m
6	7	8	9	10	60 m
11	12	13	14	15	60 m
60 m	60 m	60 m	60 m	60 m	

Figura 5.2. División y distribución de las parcelas (máximo común divisor).

Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Actividad formativa 5.2

Lee, analiza y responde.

1. Encuentra el MCD, de los siguientes números:

a) 180 y 756	b) 75 y 125	c) 15, 30 y 45	d) 96, 112 y 224
MCD(180, 756) =	MCD(75, 125) =	MCD(15, 30, 45) =	MCD(96, 112, 224) =

2. A un carpintero se le encomienda recortar una placa de madera de 1.20 metros de ancho y 2.10 metros de largo, en tablas cuadradas para venderlas como tablas de cocina para picar. Las tablas deben cortarse con el mayor tamaño posible sin desperdiciar madera. ¿Cuál es la medida de dichas tablas y cuántas se pueden obtener del corte? ______________________________

____

Mínimo común múltiplo (mcm)

Otros problemas frecuentes que se presentan en la aritmética se refieren al mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números naturales.

Ejemplo formativo 5.5

En un árbol navideño hay tres extensiones de luces que parpadean cada cierto tiempo. La extensión $E_{(1)}$ parpadea cada 6 segundos, la extensión $E_{(2)}$ cada 10 segundos y la extensión $E_{(3)}$ cada 15 segundos. ¿Cada cuánto tiempo todas las extensiones parpadearán al mismo tiempo?

La solución se puede obtener contando los ciclos de tiempo (o frecuencias) de cada una de las extensiones eléctricas y a partir de ello se determinan los múltiplos de 6, 10 y 15.

1. Determinar los múltiplos de 6 de la

$$E_{(1)} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, \ldots\}$$

2. Determinar los múltiplos de 10 de la $E_{(2)} = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, \ldots\}$
3. Determinar los múltiplos de 15 de la $E_{(3)} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, \ldots\}$
4. Determinar los múltiplos comunes de $E_{(1)} \cap E_{(2)} \cap E_{(3)} = \{30, 60, 90, \ldots\}$
5. Identificar el mínimo de los múltiplos comunes, que es 30.
6. Por lo tanto, el tiempo para que todas las extensiones enciendan al mismo tiempo es de 30 segundos.

Para determinar el mcm de dos o más números naturales de una manera práctica, se recomienda el siguiente algoritmo:

1. Realizar la factorización prima de cada uno de los números, si hay divisores repetidos, expresarlos como potencias.
2. Determinar el mcm multiplicando todos los factores comunes y no comunes de dichos números, los factores comunes aplican con el mayor exponente.

Por ejemplo, el mcm de los números 54 y 120, es:

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$\text{mcm}(54, 120) = 2^3 \times 3^3 \times 5 = 1080$ $\quad 54 = 2 \times 3^3$ $\quad 120 = 2^3 \times 3 \times 5$

Para la aplicación del algoritmo matemático de mínimo común múltiplo, se retoma el problema planteado al principio de esta progresión.

Ejemplo formativo 5.6

Luis y su papá practican ciclismo en la misma pista, pero sus rendimientos son diferentes. Luis recorre la pista en 54 segundos mientras que su papá tarda sólo 48 segundos. Si ambos inician su recorrido simultáneamente, ¿en cuánto tiempo estarán coincidiendo en el mismo punto de inicio de la pista?

Resolución:

Se sabe que los tiempos (frecuencias) de recorrido son 54 s y 48 s, respectivamente.

Se pretende determinar el tiempo que tardarán en coincidir en el número de vueltas (frecuencias). Esto indica que se debe calcular el mcm de esos dos números.

Para determinar el mcm de 54 y 48:

1. Realiza la factorización prima de cada uno de los números.

54	2
27	3
9	3
3	3
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$54 = 2 \times \mathbf{3^3}$ $\qquad$ $48 = \mathbf{2^4} \times 3$

2. Determina el mcm multiplicando todos los factores comunes y no comunes de dichos números, los factores comunes aplican con el mayor exponente.

$$\text{mcm}(54, 48) = 2^4 \times 3^3 = 432$$

Respuesta: el tiempo en que estarán coincidiendo en el mismo punto de inicio de la pista es de 432 s (7 minutos y 12 segundos).

Actividad formativa 5.3

Lee, analiza y responde.

1. Encuentra el mcm de los siguientes números:

a) 24 y 32	b) 75 y 125	c) 24, 45 y 75	d) 24, 36 y 72
mcm(24, 32) =	mcm(75, 125) =	mcm(24, 45, 75) =	mcm(24, 36, 72) =

2. En una galaxia existe un sol que emite tres diferentes rayos, de manera intermitente: El rayo alfa cada 8 segundos, el rayo beta cada 10 segundos y el rayo gamma cada 12 segundos. Si en este momento el sol emite los tres rayos simultáneamente, ¿cuántos segundos transcurren para que se emitan los tres rayos de nuevo al mismo tiempo? ______________________________

EVALUACIÓN FORMATIVA 5.1

Lee, analiza y responde.

1. Factoriza en números primos los números 130, 126 y 162.

   130 = ____________

   126 = ____________

   162 = ____________

2. Encuentra el MCD de los números 84, 210 y 420.

   MCD(84, 210, 420) = ____________________________

3. Determina el mcm de los números 14, 28 y 35.

   mcm(14, 28, 35) = ____________________________

4. Por una parada de camiones de pasaje en la ciudad de Culiacán pasan tres rutas (A, B y C) que tienen diferentes frecuencias. Los camiones de la ruta A pasan cada 20 minutos, los de la ruta B cada 24 minutos y los de la ruta C cada 30 minutos. ¿Cada cuánto tiempo coincidirán los camiones de las tres rutas en la parada?

5. Una base de datos contiene tres tipos de tareas para realizar el proyecto final: 36 tareas de la unidad 1, 84 tareas de la unidad 2 y 120 tareas de la unidad 3, las cuales serán realizadas por diferentes equipos de estudiantes. ¿Cuál es el mayor número de equipos de estudiantes que se pueden formar de manera equitativa, asignando la misma cantidad de tareas a cada equipo y que no queden tareas sin asignar?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 5. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué los conceptos de MCD y de mcm para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de mi entorno. (M1-C1)			
Empleé la factorización de números para el cálculo del MCD y mcm. (M3-C1)			
Apliqué los procedimientos para la factorización y el cálculo del MCD y del mcm para la solución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento. (M3-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

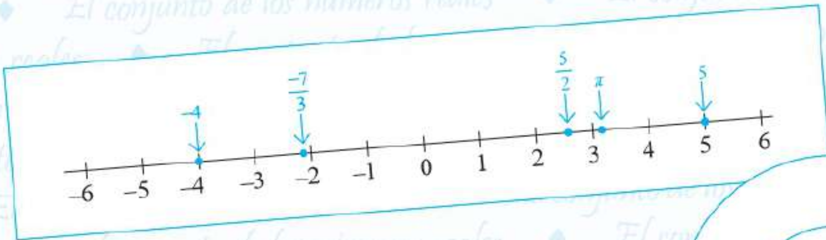
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, concluida la progresión de aprendizaje 5, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

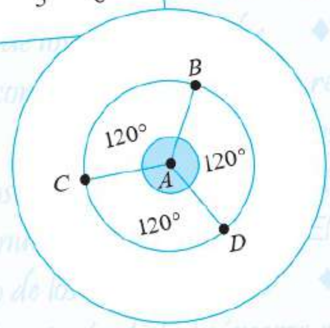
Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicó los conceptos de MCD y de mcm para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de mi entorno. (M1-C1)			
Empleó la factorización de números para el cálculo del MCD y del mcm. (M3-C1)			
Aplicó los procedimientos para la factorización y el cálculo del MCD y del mcm para la solución de problemas matemáticos y de otras áreas del conocimiento. (M3-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

El conjunto de los números reales





Progresión de aprendizaje 6

Revisa desde una perspectiva histórica al conjunto de los números reales, comenzando con la consideración de números decimales positivos hasta llegar a la presentación de la estructura de campo ordenado de los números reales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C1 Comprueba los procedimientos usados en la resolución de problemas utilizando diversos métodos, empleando recursos tecnológicos o la interacción con sus pares.	A			
	C			
	H			
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 6.1

1. Selecciona la o las respuestas correctas a cada pregunta.

a) ¿Cuál es la suma de las siguientes fracciones $\frac{3}{4}+\frac{7}{4}$?

A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{10}{8}$ C) $\frac{21}{16}$

b) ¿Cuál de las siguientes fracciones es equivalente a 0.75?

A) $\frac{6}{8}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{9}{12}$

c) ¿Cuál es la suma de los siguientes números: $\sqrt{4}+2^2$?

A) 4 B) 8 C) 6

d) ¿Cuál es valor que satisface la ecuación $x - 3 = 5$?

A) $x = 8$ B) $x = -8$ C) $x = \frac{5}{-3}$

2. Con la ayuda de la inteligencia artificial investiga.

a) Explica qué representa el número π. ______________________________

b) Un valor aproximado del número π. ______________________________

c) Explica qué representa el número $\sqrt{2}$. ______________________________

d) Un valor aproximado del número $\sqrt{2}$. ______________________________

Los números reales y sus propiedades

Con frecuencia hacemos uso de los diferentes tipos de números en las actividades diarias, cuando pagamos el transporte público, compramos alimentos, dividimos un pastel, representamos la altura de una persona, calculamos el descuento de un producto, etc.

Los primeros números que aprendemos a usar son los números para contar o números naturales.

Los **números naturales**, son el primer ejemplo que conocemos de un conjunto infinito y lo representamos con la letra $\boldsymbol{N}$.

$$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \ldots\}$$

Los **números enteros** están compuestos por el conjunto de los números naturales, sus opuestos negativos y el cero. Este conjunto lo denotamos con la letra $\boldsymbol{Z}$.

$$\boldsymbol{Z} = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Los **números enteros negativos** son aquellos números enteros que son menores que cero. Se representan por $\boldsymbol{Z}^- = \{-\infty, \ldots, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, estos son los opuestos negativos de los números naturales y forman parte del conjunto de números enteros $\boldsymbol{Z}$. Se utilizan para representar situaciones en las que se debe indicar una cantidad menor que cero, como pérdidas, deudas, descensos de temperatura, etc.

Los **números enteros positivos** son aquellos números enteros que son mayores que cero. Se representan por $\boldsymbol{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, +\infty\}$, estos son los números naturales y forman parte del conjunto de números enteros $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$.

Los **números racionales** son todos aquellos números representados por el cociente de dos números enteros, se escriben como fracciones cuando necesitamos representar una cantidad que no es exacta o una cantidad de decimales cíclica o infinita. Este conjunto se denota con la letra $\boldsymbol{Q}$.

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p \in \boldsymbol{Z}, q \in \boldsymbol{Z} \text{ y } q \neq 0\right\}$$

Todo número entero se puede representar como un cociente de dos enteros, usando la unidad como denominador, por lo tanto, todo número entero es un número racional, es decir $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$.

Todo número racional tiene una representación finita o infinita periódica, por ejemplo:

- Decimal finita: $\frac{5}{2} = 2.5$, $\frac{-1}{4} = -0.25$, $\frac{4}{5} = 0.8$, $\frac{9}{8} = 1.125$
- Decimal infinita periódica: $\frac{-10}{3} = -3.333\ldots$, $\frac{5}{11} = 0.4545\ldots$, $\frac{3}{7} = 0.428571428571\ldots$

Ahora veamos un conjunto de números diferente al de los números racionales. ¿Conoces un número que no sea racional? Recordemos ese número que usamos en el cálculo del área y perímetro de un círculo. Estamos hablando del número $\boldsymbol{\pi}$. El número $\boldsymbol{\pi}$ es el cociente del perímetro de una circunferencia entre su diámetro, como se muestra en la Figura 6.1.

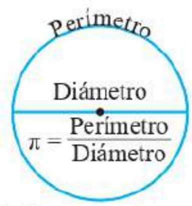


Figura 6.1. Relación entre perímetro y el diámetro.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

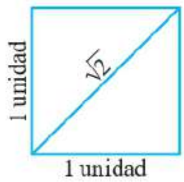


Figura 6.2. Longitud de la diagonal de un cuadrado de lado una unidad.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Otro número muy popular y conocido es $\sqrt{2}$, el cual representa la longitud de la diagonal de un cuadrado de una unidad de lado, como se muestra en la Figura 6.2.

Estos números son considerados **números irracionales** por no poderse representar como el cociente de dos enteros, y al escribirlos en forma decimal, resultan ser infinitos y no periódicos. $\pi = 3.1415926535 \ldots$, $\sqrt{2} = 1.41421356 \ldots$

El conjunto de los números irracionales lo denotamos por $\boldsymbol{Q'}$ o $\boldsymbol{I}$. El símbolo $\boldsymbol{Q'}$, significa lo que no está en $\boldsymbol{Q}$. Al unir los conjuntos de números racionales e irracionales, formamos un conjunto más extenso, que llamamos conjunto de los números reales y lo representamos con la letra $\Re$ ($\Re = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$).

El conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales son disjuntos, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{I} = \varnothing$ (no tiene ningún elemento en común). Además, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \Re$, y por otra parte $\boldsymbol{I} \subset \Re$.

Te preguntarás ¿por qué se llaman números reales?, ¿existen números que no sean reales? Las respuestas a estas dos preguntas son similares, debido a que el nombre de reales los distingue de otros números, conocidos como números complejos.

Representación de los números reales en la recta numérica

La **recta numérica** real es un modelo geométrico, que utilizamos para representar el conjunto de números reales como puntos a lo largo de una línea horizontal, que se extiende infinitamente en direcciones opuestas.

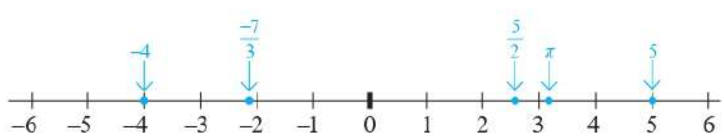
A los números naturales los asociamos con puntos situados a la derecha del cero, a los enteros negativos los asociamos con puntos situados a la izquierda del cero. Para ubicar de manera exacta un número racional no entero en la recta numérica, se divide el segmento en que se localiza en 10 partes iguales. Si el número racional tiene más decimales, se realiza el proceso tantas veces como sea necesario hasta ubicarlo exactamente, pero aquí, solo lo ubicaremos de manera aproximada. Para ubicar los números irracionales se utiliza el mismo método que para ubicar a los racionales, el cual requiere de un proceso infinito de particiones.

Ejemplo formativo 6.1

Ubica en el siguiente sobre la recta numérica, los números que aparecen a continuación $\frac{5}{2}$, -4, 5, $\frac{-7}{3}$, π.

Respuesta:

Ahora puedes observar la ubicación de números reales en la recta numérica.



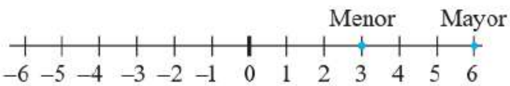
Propiedades de orden de los números reales

Hemos observado como ubicar los números reales en la recta numérica, y esto sirve para comparar dos números en el sentido de cómo es el primer número con respecto al segundo. El símbolo > lo empleamos para representar la expresión "**es mayor que**".

El símbolo < lo utilizamos para representar la expresión "**es menor que**". Y el = símbolo lo usamos para representar la expresión "**es igual que**".

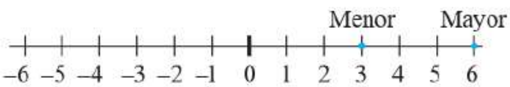
Para comparar dos números, primero los ubicamos en la recta numérica y el número que esté a la derecha en la recta númerica es el mayor, el que esté a la izquierda es el menor y si coinciden en el mismo punto de la recta, los números son iguales.

Comparar el 6 con el 3



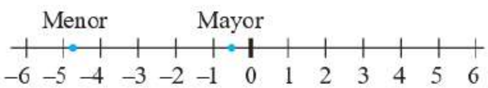
¿Cómo es el 6 con respecto al 3?
El 6 **es mayor que** 3.
Con el símbolo, $6 > 3$

Comparar el 3 con el 6



¿Cómo es el 3 con respecto al 6?
El 3 **es menor que** 6.
Con el símbolo, $3 < 6$

Comparar el $-\frac{1}{2}$ con el $-\frac{14}{3}$



¿Cómo es el $-\frac{1}{2}$ con respecto al $-\frac{14}{3}$?
El $-\frac{1}{2}$ **es mayor que** $-\frac{14}{3}$.
Con el símbolo, $-\frac{1}{2} > -\frac{14}{3}$

Utilizando este método, podemos afirmar que:

$$-2 < 1,\ 1 > -2,\ -4 > -6,\ 0 > -1,\ -1 < 0,\ 3 = 3,\ \frac{5}{2} > 1$$

Ley de tricotomía

Para comparar dos números reales cualesquiera a y b, solo una de las tres expresiones siguientes es verdadera:

$$a < b, \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b$$

Propiedades de los números reales

Con los números reales, podemos realizar las cuatro operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división (excepto la división por cero). De ellas, la suma y la multiplicación son las dos operaciones fundamentales, debido a que la resta y la división son operaciones inversas u opuestas de la suma y la multiplicación respectivamente.

Por ser el conjunto de los números reales ordenado, bajo las operaciones de suma y multiplicación, forman lo que llamamos el **campo de los números reales** que satisface las siguientes propiedades (Figura 6.3), donde a, b y c representan números reales.

Conmutativa de la suma
Notación:
$a + b = b + a$
Significado:
El orden al sumar números reales no afecta el resultado.
Ejemplos:
$7 + 5 = 5 + 7$
$(-5) + 7 = 7 + (-5)$

Conmutativa de la multiplicación
Notación:
$(a)(b) = (b)(a)$
Significado:
El orden al multiplicar números reales no afecta el resultado.
Ejemplos:
$(4)(6) = (6)(4)$
$(-3)(2) = (2)(-3)$

Asociativa de la suma
Notación:
$(a + b) + c = a + (b + c)$
Significado:
Se pueden hacer diferentes asociaciones al sumar y no se afecta el resultado.
Ejemplos:
$5 + (7 + 2) = (5 + 7) + 2$

Asociativa de la multiplicación
Notación:
$a(bc) = (ab)\, c$
Significado:
Se pueden hacer diferentes asociaciones al multiplicar y no se afecta el resultado.
Ejemplos:
$5\,(2 \times 3) = (5 \times 2)3$

Neutro de la suma
Notación:
$a + 0 = a$
Significado:
Todo número real sumado a 0 se queda igual; el cero es el idéntico aditivo.
Ejemplos:
$4 + 0 = 4$

Neutro de la multiplicación
Notación:
$a(1) = a$
Significado:
Todo número real multiplicado por 1 se queda igual; el 1 es el idéntico multiplicativo.
Ejemplos:
$\left(\frac{15}{3}\right)(1) = \left(\frac{15}{3}\right)$

Distributiva
Notación: $a\,(b + c) = ab + ac$
Significado:
El factor se distribuye a cada sumando
Ejemplos: $3\,(4 + 3) = (3)(4) + (3)(3)$

Figura 6.3. Propiedades de los números reales.
Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Ejemplo formativo 6.2

Identifica las propiedades de los números reales en operaciones básicas como: $3 + 4 = 7$.

Podemos reescribir la identidad anterior utilizando la propiedad conmutativa de la suma y sustituir el 7 de tal forma que podamos visualizarlo como dos números que se están sumando $3 + 4 = 4 + 3$. Observa que la igualdad no se altera.

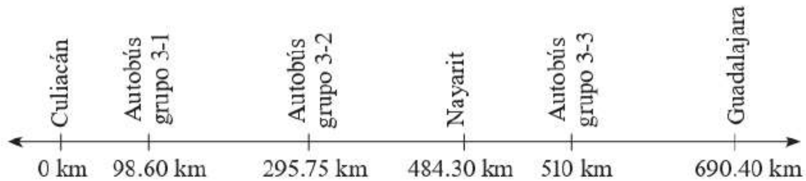
Actividad formativa 6.1

1. Analiza e identifica cuál de las propiedades de los números reales se emplea en cada inciso.
   a) $7+2=2+7$ ______
   b) $6(3) = 3(6)$ ______
   c) $8(2 + 3) = 8(2) + 8(3)$ ______
   d) $\sqrt{7} + 0 = \sqrt{7}$ ______
   e) $(rs)t = r(st)$ ______
   f) $3x(1) = 3x$ ______

2. A partir de las propiedades de los números reales, completa la expresión.
   a) Propiedad conmutativa para la multiplicación $(-3)(-1\ -5) =$ ______
   b) Propiedad distributiva $2.3(5.2 + 3.3) =$ ______
   c) Elemento inverso para la suma $\pi + (-\pi) =$ ______

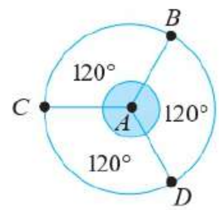
Actividad formativa 6.2

Los estudiantes de tercer año de los grupos 3-1, 3-2 y 3-3, luego de haber realizado una excelente campaña de reciclaje durante todo el año, con la ayuda de sus familiares y profesores, recaudaron la cantidad de dinero necesario para realizar un viaje a Guadalajara. La ciudad de Guadalajara se encuentra a 690.40 kilómetros de Culiacán, y los autobuses que abordan los estudiantes de cada grupo parten a distintas horas y después de haber recorrido un cierto tramo se detienen en diferentes paraderos como se indica en la siguiente representación gráfica.

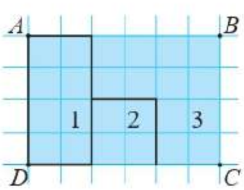


1. El autobús del grupo 3-3, aventaja al del grupo 3-2, en 214.25 km. Si el chofer del 3-2 dice que llegará en su próxima parada a Nayarit, ¿cuántos kilómetros le falta recorrer? __________
____
2. Si luego de un par de horas, el autobús del grupo 3-1 se ubica a mitad de camino, ¿cuántos kilómetros avanzó en ese tiempo desde que se detuvo por primera vez? ____________________
____

Los números racionales, como subconjunto de los números reales, los podemos utilizar para representar partes proporcionales de un mismo objeto (la fracción vista como una razón), como puede apreciarse en los siguientes ejemplos:



$\frac{360°}{3}$ es la representación en forma de cociente de 120°. Observa la figura de la derecha que muestra la representacion circular de partes proporcionales en grados de un entero.



En esta gráfica, en el área 1, de 8 u², se representan 8 de 24 cuadrados, o bien $\frac{8}{24}$, que es la parte proporcional del rectángulo *ABCD*.

El área 2, de 4 u², 4 de 24 cuadrados, o bien $\frac{4}{24}$, que es la parte proporcional del rectángulo *ABCD*.

Sumando las partes proporcionales con el resto $\frac{8}{24}+\frac{4}{24}+\frac{12}{24}=\frac{24}{24}=1$

Actividad formativa 6.3

Resuelve los siguientes problemas:

1. En Sinaloa se cultivan una gran variedad de hortalizas bajo diferentes esquemas de producción, desde los muy tradicionales hasta los más avanzados en tecnología. Entre los más comunes se encuentran los cultivos de chile, tomate, papa y elote. Un campesino siembra en su hectárea las siguientes cantidades: $\frac{3}{10}$ de chile, $\frac{2}{20}$ de tomate, $\frac{5}{25}$ de papa, y el resto de elote.

   La Figura 6.4 representa una hectárea, colorea la cantidad de chile en verde, tomate en rojo, papa en café y elote en amarillo, ¿qué cantidad del total representa el elote?

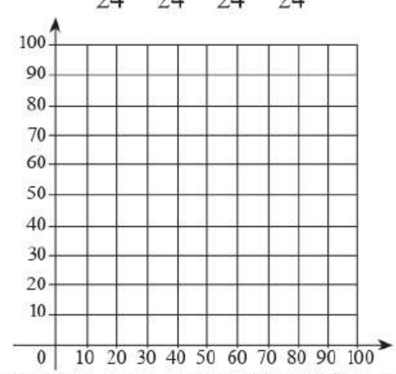


Figura 6.4. Representación gráfica de las medidas de una hectárea. (1000 m²). *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

2. Pedro salió a pasear el fin de semana con \$250. Si gastó 1/5 de su dinero en comida, 3/7 del resto en las entradas al cine y del dinero restante, la mitad para comprarse una prenda, ¿cuánto dinero le quedó? ____

Ejemplo formativo 6.3

Un grupo de jóvenes se encontraba jugando a las canicas, tenían una regla para el que quisiera jugar y era que cada jugador debía apostar 20 canicas. Participaron 3 jugadores: Juan, Pedro y Luis. Al finalizar el juego Juan se quedó con $\frac{1}{4}$ del total de canicas y Luis con $\frac{1}{3}$ del total, ¿con cuántas canicas se quedó Pedro?

Resolución*:* en total son 60 canicas (20 de cada uno). Observa que el numerador en cada fracción es 1, por lo tanto podemos resumir la operación a dividir 60 entre 4 y 60 entre 3 con lo cual estaremos calculando lo que representa $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ del total de canicas.

Puede expresarse así: $\frac{1}{4} = \frac{x}{60}$ y $\frac{1}{3} = \frac{x}{60}$, entonces $\frac{1}{4}$ equivale a 15 y $\frac{1}{3}$ a 20 canicas, lo cual indica que Pedro se está llevando 5 más de las que había apostado.

Respuesta: Pedro se queda con 25 canicas.

Los números irracionales se pueden ubicar sobre la recta numérica como puedes ver en el código QR 6.1 y se utilizan en algunos ejercicios con figuras geométricas, por ejemplo, al calcular la diagonal de un cuadrado de área igual a uno o al calcular el área de un círculo πr^2 o el perímetro correspondiente a una circunferencia πD o $2\pi r$.

QR 6.1. Ubicación de números irracionales en la recta numérica. *Fuente:* Parzibyte, 2024.

Ejemplo formativo 6.4

Calcula el área comprendida por una circunferencia con un radio de 3 cm.

Resolución: sabemos que el área se calcula con la fórmula: $A = \pi r^2$; si sustituimos el valor del radio $A = \pi(3)^2$; elevamos el 3 al cuadrado; $A = \pi(9)$ y multiplicamos los valores queda como resultado $A \simeq 28.2743$ cm^2.

Respuesta: el área es de 28.2743 cm^2 aproximadamente.

Actividad formativa 6.4

En la preparatoria, para festejar el día del estudiante, se realizarán eventos deportivos. De un grupo de 40 alumnos, $\frac{3}{5}$ partes se anotaron en futbol y $\frac{2}{4}$ partes en voleibol.

1. ¿Cuántos de ellos se anotaron en futbol y cuántos en voleibol?
   a) 16 y 20 b) 24 y 16 c) 24 y 20

2. ¿Cuántos alumnos se anotaron en ambos deportes?
   a) 4 b) 3 c) 5

EVALUACIÓN FORMATIVA 6.1

1. Investiga en internet y elabora un diagrama de Venn que represente el orden de inclusión del conjunto y subconjuntos de todos los números reales.

2. En los siguientes enunciados responde falso (F) o verdadero (V).

   a) 0 es un número natural ( )

   b) –21 es un número natural ( )

   c) π no es un número racional ( )

   d) $\sqrt{2}$ es un número racional ( )

   e) $\sqrt{5}$ es un elemento de $\Re$ ( )

   f) $\frac{1}{3}$ no pertenece a Z ( )

3. Jonathan afirma que –5/3 es un número racional y Gisela afirma que es un número real. ¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta. ____

4. La temperatura en La Rosilla, Durango es –7 °C mientras que en la sierra de Sonora es de –2°C. ¿En cuál lugar es mayor la temperatura? ____

5. Dos submarinos navegan en el mar, el primero a –12 m sobre el nivel del mar y el segundo a –30 m, ¿cuál de ellos se encuentra a menor profundidad? ________________________________

6. En la carretera a Sanalona, un agricultor vende 10 litros de miel por \$750. ¿Cuál sería el costo por 6 litros de miel? ____

7. Calcula el radio de una circunferencia, si se sabe que el área comprendida por la misma es de 40 cm^2. ____

8. Si el sueldo de un repartidor de pizzas a la semana es de \$1,852, ¿cuánto gana por día? _________

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 6. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Resolví problemas utilizando las propiedades de los números reales. (M3-C1)			
Comprendí que la estructura y propiedades del campo de los números reales facilita la solución de problemas matemáticos. (M1-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, concluida la progresión de aprendizaje 6, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Resolvió problemas utilizando las propiedades de los números reales. (M3-C1)			
Comprendió que la estructura y propiedades del campo de los números reales facilita la solución de problemas matemáticos. (M1-C2)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Proporcionalidad directa e inversa

Ingredientes	Número de personas						
	4	8	12	16	20	24	28
Limones	10						
Lata de leche	1						
Tazas de yogur	2						
Tazas de agua	$\frac{1}{2}$						
Sobre de grenetina	4						

Progresión de aprendizaje 7

Resuelve situaciones-problema significativas para el estudiantado que involucren el estudio de proporcionalidad, tanto directa como inversa, así como también el estudio de porcentajes, empleando la estructura algebraica de los números reales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C2 Compara hechos, opiniones o afirmaciones para organizarlos en formas lógicas útiles en la solución de problemas y explicación de situaciones y fenómenos.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 7.1

Lee, analiza y responde lo siguiente.

1. Define el concepto de razón matemática y ejemplifica una situación en la que se emplea. ________
2. Explica o establece la diferencia entre una fracción y una razón matemática. ________
3. Establece una definición de proporción. ________

4. En una campaña de recaudación de fondos de una organización sin fines de lucro se logró obtener la cantidad de \$50,000.00. *La razón* en cómo van a distribuirlos en dos de sus programas es de 3:2, ¿cómo sería asignada dicha cantidad?

5. Para preparar una jarra con dos litros de agua saborizada se requiere de un sobre que contiene 14 g de concentrado en polvo, ¿cuántos gramos se necesitan para preparar ocho litros de agua saborizada?

En los planteamientos anteriores, pudiste observar y establecer ciertos razonamientos relacionados con *la razón* matemática y el pensamiento proporcional. De igual manera, resolviste situaciones que requieren un análisis y técnicas que hacen posible su solución mediante estrategias y estructuras algebraicas. Ahora desarrollarás procesos de carácter formal y argumentos para una situación contextualizada, como es el siguiente caso.

La pirámide de *Keops*

Cuenta la historia que un sacerdote egipcio le preguntó a Tales de Mileto (s. IV a.C.) acerca de la altura de la Pirámide de *Keops* (Artacho, 2024), esto cuando ya las pirámides rondaban los 2000 años de edad. Se dice que, para dicha situación, Tales de Mileto planteó un método ingenioso para medir dicha altura y empezó explicando que lo haría aprovechando las sombras que produce la pirámide y su bastón al mismo tiempo.

Él explicaba que los rayos del sol que inciden en la pirámide y en el bastón son paralelos, y dado que el bastón está colocado perpendicularmente al suelo, sus sombras definían triángulos semejantes (son aquellos cuyos lados son proporcionales y tienen ángulos iguales). Posterior a dicha observación, procedió a obtener tres medidas correspondientes a la longitud de la sombra de la pirámide (L), la sombra del bastón (l) y la altura del bastón (h); registrando las siguientes magnitudes:

$$L = 296.45 \text{ m},\ l = 3.14 \text{ m y } h = 1.45 \text{ m}.$$

A partir de los datos de la Figura 7.1, Tales calculó la altura de la pirámide (H) argumentando la proporcionalidad de los segmentos y dejando la representación de los triángulos y las variables que involucran (simbolizan) a cada elemento.

$$\frac{H}{h} = \frac{L}{l}$$

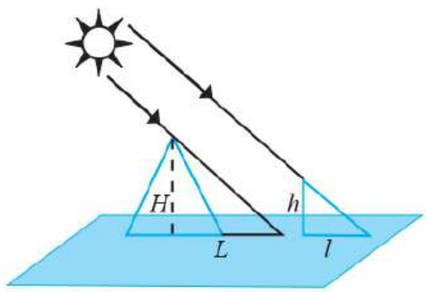


Figura. 7.1. Triángulos semejantes que se forman por la proyección del sol sobre la Pirámide de *Keops* y sobre un bastón. Los ángulos de los triángulos formados son iguales, por lo tanto, dichos triángulos son semejantes. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Tomando en cuenta la expresión anterior puedes interpretar con un lenguaje natural que **la razón de las alturas es proporcional a la razón de las sombras**. Por lo tanto, en lenguaje matemático, la variable altura H de la pirámide queda expresada como:

$$H = \frac{L \cdot h}{l}$$

Razón y proporción

A partir de este punto, puedes entender que una razón es la comparación entre dos magnitudes. Tal es el caso cuando la relación entre la base y la altura de un portarretratos puede expresarse en la forma 20:30, lo que se entiende como que tiene 20 cm de base y 30 cm de altura, y se lee "20 es a 30". Esto significa que la base mide $\frac{2}{3}$ de la altura.

Una razón es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$. Además, a y b son números reales que están expresados en las mismas unidades. En otras palabras, la razón es la comparación de dos cantidades mediante un cociente. Algunas veces, esta razón se escribe como $a : b$ y se lee "a es a b".

Ahora veamos otro concepto, el de proporción. En el caso de la bandera nacional, debe estar a una razón 4 de ancho por 7 de largo. Esto significa que toda bandera con dimensiones a de ancho y b de largo, debe cumplir la siguiente proporción $\frac{a}{4} = \frac{b}{7}$.

Partiendo de que una proporción es la igualdad de dos razones, se dice entonces que, las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales o están en proporción si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Con el análisis anterior, puedes observar y comprobar la propiedad fundamental de las proporciones la cual satisface que **el producto de los extremos es igual al producto de los medios.**

En forma simbólica, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ viene a cumplir $a \cdot d = b \cdot c$, de este modo, conociendo tres términos cualesquiera de una proporción, es siempre posible calcular el cuarto término.

La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ también se escribe como $a : b : c : d$ y se lee *"a es a b como c es a d"*.

Proporcionalidad directa

La riqueza del concepto de proporcionalidad permite mostrar que la matemática se articula en diversos contextos cuando se atiende su definición y se usa conforme a sus fundamentos para enfrentar alguna situación. En ese sentido, se dará por entendido que una proporción es una igualdad entre dos razones, las cuales están compuestas por magnitudes.

En consecuencia, el primer intento que haremos para abordar la solución de problemas y la modelación, será poniendo en práctica la lógica de una ***proporcionalidad directa***. Se parte de la idea de que una magnitud y es directamente proporcional a la magnitud x si la razón o el cociente entre ambas es constante, es decir, $\frac{y}{x} = k$, recibiendo k el nombre de constante de proporcionalidad, para lo cual es necesario se satisfaga que $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$. Dicho de otra forma, $y = k \cdot x$.

Ejemplo formativo 7.1

Fabiola quiere aprender a preparar gelatinas cremosas de limón a partir de una receta que su mamá le entregó con los ingredientes necesarios para cuatro personas, sin embargo, ella quiere hacer una tabla de esta receta para un número diferente de personas.

Paso 1. Comprender el problema

Gelatina de limón cremosa

Ingredientes:

• 10 limones	• $\frac{1}{2}$ taza de agua
• 1 lata de leche condensada, 395g.	• 4 sobres de grenetina, 7g
• 2 tasas de yogurt natural	*opcional:* rayadura de limón

Paso 2. Concebir un plan

Para lo anterior, es necesario ajustar la receta y calcular las cantidades de ingredientes que se ocupan para un número específico de personas. Por ello, es importante observar y completar la siguiente tabla:

Ingredientes	Número de personas						
	4	8	12	16	20	24	28
Limones	10						
Lata de leche	1						
Tazas de yogur	2						
Tazas de agua	$\frac{1}{2}$						
Sobre de grenetina	4						

Paso 3. Ejecutar el plan

Determina las porciones de ingredientes para 8, 12 y 16 personas; posteriormente, de manera independiente, puedes concluir la tabla con las porciones faltantes.

Si y representa la cantidad del ingrediente y x es el número de personas, establecemos que $y = k \cdot x$, de donde $k = \frac{y}{x}$.

	Para 8 personas	Para 12 personas	Para 16 personas
Limones: $k = 2.5$	$2.5 \cdot 8 = 20$	$2.5 \cdot 12 = 30$	$2.5 \cdot 16 = 40$
Leche condensada: $k = 0.25$	$0.25 \cdot 8 = 2$	$0.25 \cdot 12 = 3$	$0.25 \cdot 16 = 4$
Tazas de yogur: $k = 0.5$	$0.5 \cdot 8 = 4$	$0.5 \cdot 12 = 6$	$0.5 \cdot 16 = 8$
Tazas de agua: $k = 0.125$	$0.125 \cdot 8 = 1$	$0.125 \cdot 12 = 1.5$	$0.125 \cdot 16 = 2$
Sobre de grenetina: $k = 1$	$1 \cdot 8 = 8$	$1 \cdot 12 = 12$	$1 \cdot 16 = 16$

Para obtener los datos de la tabla, multiplica el número de personas (x) por la constante de proporcionalidad (k) y obtendrás la porción de cada ingrediente.

Paso 4. Visión retrospectiva

Si y representa la cantidad del ingrediente y x es el número de personas, se debe satisfacer que $k = \frac{y}{x}$.

$$\frac{20}{8} = \frac{30}{12} = \frac{40}{16} = 2.5$$
$$\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = 0.25$$
$$\frac{4}{8} = \frac{6}{12} = \frac{8}{16} = 0.5$$
$$\frac{1}{8} = \frac{1.5}{12} = \frac{2}{16} = 0.125$$

Por lo tanto, la cantidad de ingredientes y es correcta para el número de personas x indicadas en la tabla anterior.

Actividad formativa 7.1

1. Modela y resuelve la siguiente variación de proporcionalidad directa. Si y es directamente proporcional a x, y se sabe que $y = 4$ cuando $x = 8$, expresa a y como función de x y determina el valor de y para $x = 12$.

2. Recupera los datos de la pirámide de *Keops* y calcula su altura retomando las tres medidas correspondientes a la longitud de la sombra de la pirámide, la sombra del bastón y la altura del bastón.

3. Analiza las siguientes situaciones y responde utilizando las técnicas y lenguaje matemático de acuerdo a lo que se indica en cada caso.

   a) Para obtener el color verde se recomienda hacer una mezcla de color azul y amarillo en razón de 1:3. ¿Cómo interpretarías dicho planteamiento? ______________________________
   ____
   ____

   b) Si en un tubo de ensayo se agregan 5 ml de color azul, ¿cuántos ml tendrías que agregar de color amarillo para seguir obteniendo la misma tonalidad de color verde? ______________
   ____

   c) Expresa en razón matemática los ml que se agregaron en el planteamiento anterior y argumenta por qué es una relación entre dos magnitudes: ______________________________
   ____
   ____
   ____

   d) Establece una proporción para obtener un litro de la misma tonalidad del color verde expresando la magnitud y la unidad de medida. ______________________________
   ____
   ____

   e) *Pregunta de reflexión.* ¿Qué sucede en el caso de que se requiera obtener $\frac{1}{4}$ de litro en la misma tonalidad del color verde? ______________________________
   ____
   ____
   ____
   ____

4. Al consultar la ficha técnica de un saco de "Cemento MeXcla Big Bag", se observa que para lograr un concreto con una f´c (resistencia del concreto) de 200 kg/cm^2, se requiere un bote de 19 L como medida para agregar las siguientes proporciones a la mezcla como se muestra en la tabla.

Resistencia	Aplicación	Cemento Bote 19 L	Arena Bote 19 L	Grava Bote 19 L	Agua Bote 19 L	Volumen en L
f'c =200 kg/cm^2	Zapata	4	4	6	2	145

Por la práctica, se sabe que, para obtener una mezcla con un volumen de 1000 L, se ocupan 28 botes de cemento.

   a) ¿Cuál es la cantidad de cada material que se necesita para hacer dicha mezcla?

   b) Si se desea construir una zapata de 60 cm × 60 cm × 20 cm, ¿qué volumen de material se ocupa si se sabe que 1000 L equivale a 1m^3?

Proporcionalidad inversa

En una ***proporcionalidad inversa*** se da una relación en la que se establece que sí y aumenta, x debería disminuir, o viceversa, esto implica que $y_1 \bullet x_1 = k = y_2 \bullet x_2$, haciendo posible calcular la variable $y = \frac{k}{x}$, así como la variable $x = \frac{k}{y}$.

Ejemplo formativo 7.2

Relaciona la información necesaria para conjeturar sobre la situación y establecer la solución.

Considera que, si tres pintores tardan 12 días en pintar cierta área de un fraccionamiento, ¿cuántos días tardarán en hacer el mismo trabajo nueve pintores bajo iguales condiciones?

Una manera de dar solución al planteamiento es la siguiente relación:

$$\frac{x}{3} = \frac{12}{9}$$

$$x = \frac{(3)(12)}{(9)}$$

$$x = 4$$

Por lo tanto, nueve pintores hacen el trabajo en cuatro días.

De igual manera, otra forma de encontrar el resultado sería considerando la siguiente tabla. Las magnitudes correspondientes a pintores y días tienen una relación inversamente proporcional. Por lo que, se puede interpretar que, al aumentar el número de pintores los días para concluir la obra disminuirán. Por su parte, para obtener una posible solución debes multiplicar estas dos magnitudes y cuidar que el producto sea constante, de tal manera que:

Pintores	Días	Unidades
3	12	36
6	6	36
9	4	36

Así mismo, es posible establecer un procedimiento con la constante de proporcionalidad:

$$3 \bullet 12 = 36 = 9 \bullet x$$

$$x = \frac{36}{9} = 4$$

Por lo tanto, nueve pintores hacen el trabajo en cuatro días.

Actividad formativa 7.2

1. Actualmente un corredor entrena en pista durante 40 minutos en los cuales recorre una distancia total de 7.5 km con una velocidad promedio de 11.20 km/h. Si con los entrenamientos su velocidad mejora a 12 km/h, ¿qué tiempo haría para recorrer la misma distancia?

2. Un arquitecto está interesado en comprar un terreno rectangular con una superficie que relaciona el ancho y el largo con las medidas de 5 m × 40 m, sin embargo, está considerando que, para tener una mejor distribución de la construcción, es necesario tener la misma superficie, pero que el ancho mida 8 m, por lo tanto, ¿qué medida debe tener el largo del terreno para que cumpla con la optimización de los espacios?

3. Determina lo que se te pide aplicando la constante de proporcionalidad inversa. De acuerdo con la Ley de Boyle, cuando la temperatura se mantiene constante, el volumen (V) de una masa dada de un gas varía inversamente proporcional con la presión (P) a la que se somete dicho gas:

$$P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$$

Una cantidad de gas ocupa un volumen de 80 cm³ a una presión de 750 mm Hg (milímetros de mercurio). Permaneciendo la temperatura constante, ¿qué volumen ocupará a una presión de 912 mm Hg si la temperatura no cambia?

Porcentajes

El porcentaje de una magnitud es una relación de proporcionalidad entre una cantidad y un conjunto de unidad, expresado por cada 100 de ellos, además, permite expresar y comparar las partes de un todo mediante razones y proporciones. Este se usa para calcular descuentos, intereses, impuestos, propinas, comisiones, frecuencias y partes.

$$\text{El porcentaje es igual a } \frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \times 100\%$$

Cabe mencionar que en estas situaciones los conceptos de razón y porcentaje se encuentran estrechamente relacionados, porque ambos son utilizados para representar una cantidad como fracción de un entero o en cien partes iguales.

Ejemplo formativo 7.3

Procesa la información para realizar las conjeturas necesarias y dar solución.

Un huerto piloto que se instaló en la Unidad Académica Preparatoria Escuinapa, ocupa una extensión de 350 m² y es dividido en tres parcelas para cultivos (que se consumen en la comunidad) como son pepino, cebolla y tomate. El esquema de disposición del campo será de la siguiente manera: 105 m² para pepino, 112 m² para cebolla y 133 m² para tomate, ¿qué porcentaje del terreno le corresponde a cada cultivo?

Resolución:

$$\text{Porcentaje } (\textit{pepino}): \frac{105}{350} \times 100\% = 30\%$$

$$\text{Porcentaje } (\textit{cebolla}): \frac{112}{350} \times 100\% = 32\%$$

$$\text{Porcentaje } (\textit{tomate}): \frac{133}{350} \times 100\% = 38\%$$

Para el pepino se destinará el 30% del huerto, para la cebolla un 32% y para el tomate un 38%.

Actividad formativa 7.3

1. Caleb pagó $879.20 por una camisa casual, esta tenía un descuento del 20% sobre su precio original, ¿cuál es el precio original?

2. El centro de las monedas de 10 pesos es una aleación de alpaca plateada que contiene un porcentaje en masa de 65% cobre, 10% de níquel y 25% de zinc; con una masa de 4.75 gramos. Mientras que su anillo es una mezcla de bronce-aluminio, con una composición de porcentaje en masa de 92% de cobre, 6% de aluminio y 2% de níquel; con una masa de 5.579 gramos. Determina qué masa en gramos le corresponde a cada elemento.

3. La concentración de un suero glucosado al 5% indica que en 100 ml de concentración hay cinco gramos de glucosa, por lo que si a un paciente se le administran 1000 ml/día de este suero, y conociendo que un gramo es igual a 1000 miligramos, ¿cuántos miligramos de glucosa recibe al día?

EVALUACIÓN FORMATIVA 7.1

Pon en práctica el conjunto de conocimientos y experiencias adquiridas aplicando las diversas estrategias de solución y ejecutando procedimientos.

1. Un medicamento debe administrarse en dosis de 0.075 g por cada 1,500 g de peso corporal, ¿cuál es la dosis para una persona que pesa aproximadamente 52 kg?

2. ¿Qué cantidad de cada ingrediente se necesita para hacer una gelatina cremosa de limón con una proporción para 10 personas?

3. La obra literaria "*Cien años de soledad*" de Gabriel García Márquez (1927-2014), de acuerdo a su ficha bibliográfica, edición conmemorativa, está compuesta por 752 páginas. Por lo tanto, si una persona promedio puede leer alrededor de 40 páginas por hora, ¿en cuántas horas logrará concluir la lectura referente a esta novela?

4. Los datos del desplazamiento de un automóvil en función del tiempo se muestran en la siguiente tabla:

Datos del desplazamiento del automóvil						
Tiempo (t)	1	2	4	5	7	10
Desplazamiento (d)			480			

a) Establece una expresión para dicha relación.
b) Completa la tabla.
c) Grafica los datos del desplazamiento en función del tiempo.

5. El encargado de una obra ha determinado que tres pintores tardan en hacer un trabajo 12 días, si dicho trabajo se requiere entregar en ocho días, ¿cuántos trabajadores se necesitan contratar?

6. En un instrumento de cuerda, la longitud (L) de una cuerda varía inversamente proporcional con la frecuencia (f) de sus vibraciones. Una cuerda de guitarra de longitud de 65 cm vibra estacionariamente en su modo fundamental a una frecuencia de 440 Hz (Hertz). Encuentra la constante de proporcionalidad y la frecuencia de una cuerda de 69 cm.

7. Un arquitecto está interesado en comprar dos terrenos en forma rectangular con una superficie de 200 m^2 cada uno. Para hacer una distribución adecuada de la construcción ha considerado que los terrenos tengan 10 m y 8 m de ancho, ¿qué medidas deben tener de largo?

8. La masa de la moneda de \$10.00 es de 10.329 gramos. Si se conoce que aleación dorada es de 5.579 g, ¿qué porcentaje de esa masa le corresponde a su aleación dorada y a su aleación plateada?

9. En el diplomado de Pensamiento matemático, la ponderación de un examen de 25 preguntas es equivalente al 20%, ¿qué porcentaje obtuvo una alumna que obtuvo 16 aciertos?

10. El tamaño de una fotografía es de 20×25 cm, en una relación de base por altura. La intención es hacer una modificación proporcional de su tamaño y para ello la indicación es disminuir a 13 cm su base. Determina las nuevas medidas de la fotografía.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ____________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 7. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Expliqué el proceso de resolución de un problema real usando proporciones o porcentajes. (M3-C2)			
Presenté soluciones viables a problemas reales que se resuelven mediante proporciones o porcentajes. (M4-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

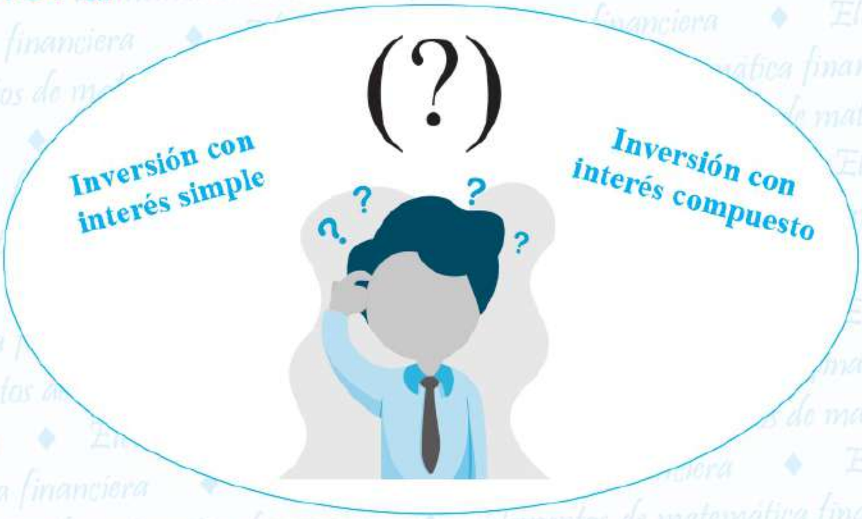
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 7, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Explicó el proceso de resolución de un problema real usando proporciones o porcentajes. (M3-C2)			
Presentó soluciones viables a problemas reales que se resuelven mediante proporciones o porcentajes. (M4-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Elementos de matemática financiera



Progresión de aprendizaje 8

Discute la conformación de un proyecto de vida considerando elementos básicos de la matemática financiera tales como interés simple y compuesto, ahorros y deudas a través de la aplicación de la estructura algebraica de los números reales y con la finalidad de promover la toma de decisiones más razonadas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			
M1-C4 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 8.1

Selecciona la o las respuestas correctas según corresponda:

1. ¿Cómo se define el capital en el contexto de la matemática financiera?
   a) La cantidad de dinero depositada o prestada, sobre la cual se calcula el interés.
   b) El total de intereses ganados o pagados en un período de tiempo.
   c) El valor final de una inversión después de un período de tiempo.
   d) La tasa de interés aplicada a una inversión o préstamo.

2. ¿Qué es el interés en el contexto financiero?
   a) El dinero que se recibe por mantener un saldo positivo en una cuenta bancaria.
   b) El porcentaje del capital prestado que un prestamista cobra a un prestatario por el uso del dinero.
   c) La cantidad total de dinero pagada al final de un préstamo.
   d) El dinero que se debe pagar por utilizar un servicio bancario.

3. ¿Qué se entiende por amortización en el contexto de préstamos financieros?
   a) El proceso de reducir el saldo de un préstamo mediante pagos regulares que cubren tanto el principal como el interés.
   b) El aumento del saldo de un préstamo debido a intereses no pagados.
   c) El pago único realizado al final del período del préstamo.
   d) El cálculo del interés compuesto sobre un préstamo.

4. ¿Qué es la capitalización en matemáticas financieras?
   a) El proceso de calcular los intereses sobre el capital inicial únicamente.
   b) La frecuencia con la que se añaden los intereses ganados al capital principal, permitiendo que los intereses generen a su vez más intereses.
   c) El monto total pagado en un préstamo al final de su término.
   d) El cálculo del valor presente de una inversión futura.

5. ¿Cuál es el resultado de $(3x-2)^t$, si $x = 4$ y $t = 2$?
   a) 64 b) 100 c) 144 d) 196

6. María compró un vestido que originalmente costaba $1,200.00, pero estaba en oferta con un descuento del 25%. Además, tuvo que pagar un impuesto del 8% sobre el precio con descuento, ¿cuál fue el precio final que pagó María por el vestido?
   a) $936.00 b) $972.00 c) $1,026.00 d) $1,152.00

Raúl y Elizabeth son un matrimonio joven que ha logrado ahorrar $1,000,000.00 a través de su arduo trabajo y disciplina financiera. Ambos, están interesados en invertir este capital para asegurar su futuro y obtener un rendimiento adicional. Después de investigar varias opciones, deciden acudir al Banco InvertAhorro, conocido por ofrecer atractivas tasas de interés y planes de inversión flexibles.

Durante su reunión con el asesor financiero del banco, este les ofrece dos opciones:

Opción A: inversión con interés simple.

- Tasa de interés: 6% anual.
- Duración: cinco años.

Opción B: inversión con interés compuesto.

- Tasa de interés: 5% anual capitalizable cada semestre.
- Duración: cinco años.

Raúl y Elizabeth intercambian sus ideas sobre cómo invertir el dinero. Elizabeth sugiere la opción A, su razonamiento es que al final de cada año, podrán retirar los intereses generados y utilizarlos para cubrir algunos gastos planificados, como unas vacaciones familiares o la remodelación de su hogar.

Por otro lado, Raúl propone un enfoque diferente. Él cree que es mejor optar por la opción B, con la diferencia de que los intereses generados semestralmente se reinviertan o capitalicen. De esta manera, argumenta Raúl, el capital inicial crecerá aún más, ya que generará intereses sobre los intereses acumulados de cada semestre.

Ante estas dos propuestas, Raúl y Elizabeth se encuentran indecisos sobre qué plan de inversión les conviene más para obtener el mayor rendimiento posible de su capital, ¿cuál de las dos propuestas de inversión a largo plazo les ofrece un mayor rendimiento a Raúl y Elizabeth?

Interés simple

Pensando en tu futuro, quizás estés considerando ir a la universidad, comenzar un negocio o ahorrar para comprar tu primer auto. En este momento, es importante entender cómo funciona el dinero y cómo puede trabajar para ti. Aquí es donde entra en juego el interés simple.

El interés simple es un concepto financiero básico que se aplica en muchas situaciones de la vida real. Desde solicitar un préstamo para pagar tu matrícula universitaria, hasta abrir una cuenta de ahorros en el banco, por lo que este está presente en muchas transacciones financieras cotidianas.

¿Cómo funciona el interés simple? Imagina que tu mejor amigo te pide prestados $1,000.00 para ir a un concierto y promete pagarte en un mes con un interés del 5%. Esto significa que al final del mes, te devolverá los $1,000.00 más $50.00 de intereses. Este es un ejemplo de cómo funciona el interés simple: se calcula únicamente sobre el capital inicial prestado.

Ahora, piensa en ti mismo. Tal vez estés ahorrando para comprar un auto usado. Si depositas $5,000.00 en una cuenta de ahorros que ofrece un interés simple anual del 2%, al cabo de un año, tendrás $5,100.00. Ese dinero extra que ganaste, puede ayudarte a alcanzar tu meta de comprar el auto más rápido.

El interés simple se refiere, al cálculo del interés únicamente sobre el monto inicial prestado o invertido y no sobre los intereses generados en periodos anteriores. Esto lo convierte en un método sencillo y directo para determinar el costo o ganancia de una operación financiera. Este se calcula sobre el capital inicial y no sobre los intereses generados en periodos anteriores. La fórmula para calcularlo es:

$$I = C \bullet i \bullet t$$

Donde:

I: interés generado; C: capital inicial; i: tasa de interés y t: tiempo.

Retomando el caso de Elizabeth, que eligió la opción A: inversión con interés simple con una tasa de interés del 6% anual a cinco años. En el primer año el interés obtenido es:

$$I = (1{,}000{,}000)(0.06) = 60{,}000$$

Por lo tanto, el interés total por un año sería de $60,000.00. Tomando en cuenta la inflación, que por lo regular el dinero se deprecia cada año, alcanzándole menos su dinero para los gastos requeridos y, en consecuencia, para sus vacaciones. Al final de cinco años el interés total obtenido sería de $300,000.00

Ejemplo formativo 8.1

1. Tu generación de bachillerato está organizando una fiesta de graduación y necesita recaudar $100,000.00, el comité de la fiesta decide pedir un préstamo a un padre de familia que ofrece un interés simple del 3% anual. Si planean pagar el préstamo en 6 meses, ¿cuánto tendrán que devolver en total?

Resolución:

Para calcular el interés simple, usamos la fórmula: $I = C \bullet i \bullet t$.

En este caso:

$C = \$10{,}000.00$

$i = 3\%$ es equivalente a $i = 0.03$

$t = 6/12 = 0.5$ años (ya que 6 meses es medio año)

Entonces, el interés será: $I = 100000 \times 0.03 \times 0.5 = 1500$

El comité tendrá que devolver el capital principal de $100,000.00 más un interés de $1,500.00; es decir, un total de $101,500.00

2. Pedro invierte $10,000.00 a una tasa de interés simple del 5% anual durante tres años, ¿cuánto interés ganará Pedro después de tres años?

Resolución:

Usando la fórmula para calcular el interés simple: $I = C \cdot i \cdot t$.

$I = (10000)(0.05)(3) = 1500$

Por lo tanto, Pedro ganará $1,500.00 de interés después de tres años.

3. Quieres ahorrar $20,000.00 para un viaje de verano con tus amigos. Tienes $10,500.00 ahorrados y decides invertirlos en un certificado de depósito (CD) a nueve meses con una tasa de interés simple anual del 2.5%, ¿cuánto dinero te faltará después de los nueve meses, para completar la cantidad final que necesitas?

Resolución:

Usando la fórmula para calcular el interés simple: $I = C \cdot i \cdot t$.

$C = \$10,500.00$; $i = 2.5\%$ es equivalente a $i = 0.025$; $t = 9/12 = 0.75$ años

Entonces, el interés será: $I = 10500 \times 0.025 \times 0.75 = 196.88$.

Al final de los nueve meses, tendrás $10,696.88. Es decir, te faltará un total de $9,303.12.

Actividad formativa 8.1

1. María invierte $5,000.00 en un certificado de depósito que le paga un interés simple del 3% anual, ¿cuánto dinero tendrá al final de cuatro años? ______________________________

2. Carlos ha decidido ahorrar dinero para comprar un nuevo teléfono móvil que cuesta $30,000.00. Deposita $10,000.00 en una cuenta de ahorro que ofrece un interés simple del 5% anual.
   a) ¿Cuánto tiempo le tomará acumular suficiente dinero para comprar el teléfono? ________
   ____
   b) ¿Es conveniente esperar el tiempo que resulta en el inciso a)? ______ ¿Por qué? _______
   ____

3. Carlos tiene una deuda de $5,000.00 con una tarjeta de crédito que cobra un interés simple del 15% anual. Aunque tiene la capacidad de pagar más del pago mínimo de $100.00 cada mes, decide seguir pagando solo el mínimo porque “siempre ha sido así”.
   a) ¿Cuánto tiempo tardará en cubrir su deuda? ______________________________
   b) ¿Crees que la decisión tomada por Carlos es la más adecuada? ________________

4. Pedro está considerando solicitar un préstamo personal de $10,000.00 para financiar unas vacaciones. Aunque la tasa de interés del préstamo es del 12% anual, Pedro se enfoca en el hecho de que solo tendrá que pagar $200.00 al mes en intereses. ¿Cómo podría influir un “abono chiquito” en su percepción del costo total del préstamo y en su capacidad para tomar decisiones financieras informadas? ______________________________
   ____

5. Ana está considerando dos opciones de inversión: una cuenta de ahorros con interés simple del 3% anual y una inversión en acciones que históricamente ha tenido un rendimiento del 8% anual. Aunque la inversión en acciones tiene un rendimiento potencialmente mayor, Ana recuerda vívidamente una situación en la que el mercado de valores experimentó una caída significativa, ¿cómo podría incidir su experiencia sobre el riesgo en su decisión de dónde invertir su dinero? ______________________________
   ____

Interés compuesto

¿Alguna vez has pensado en cómo tu dinero puede crecer con el tiempo? Si tienes una alcancía donde guardas tus ahorros y cada mes tu papá, para estimularte a seguir ahorrando, te da un 5% del total que hay en la alcancía para que también lo ahorres, y esto se repite durante un año. Sorprendentemente, tu alcancía parece llenarse más rápido de lo que esperabas. El dinero adicional que recibes por ese extra que te da tu papá, se le conoce como interés compuesto. Es decir, que te paguen intereses de los intereses.

El interés compuesto es un concepto financiero, que tiene el potencial de hacer crecer tu dinero de manera exponencial a lo largo del tiempo. A diferencia del interés simple, donde solo ganas intereses sobre tu capital inicial, el interés compuesto te permite ganar intereses sobre tus intereses previos. Es como si tu dinero estuviera trabajando para ti, generando más dinero mientras tú sigues con tu vida.

Imagina que tienes $1,000.00 en una cuenta que te ofrece un 5% de interés anual compuesto. Después del primer año, tendrás $1,050.00. Pero la magia ocurre en los años siguientes: en el segundo año, ganarás intereses no solo sobre los $1,000.00 iniciales, sino también sobre los $50.00 que ganaste en el primer año. Esto significa que, para el segundo año, tu balance crecerá a $1,102.50. A medida que pasan los años, este efecto se multiplica, permitiendo que tu dinero crezca a un ritmo cada vez mayor.

El interés compuesto es una opción que puede ayudarte a alcanzar tus metas financieras a largo plazo, como ahorrar para la universidad, comprar una casa o planificar tu jubilación. Cuanto antes empieces a invertir y aprovecharlo, más tiempo tendrá tu dinero para crecer.

El interés compuesto se calcula sobre el capital inicial y los intereses generados en periodos anteriores. La fórmula para calcular el monto final con interés compuesto es:

$$M = C(1 + i)^t$$

Donde:

M: monto final; C: capital inicial; i: tasa de interés y t: tiempo.

Ejemplo formativo 8.2

1. Luis decide invertir $8,000.00 en un plan de ahorro que ofrece un interés compuesto del 6% anual, ¿cuánto dinero tendrá acumulado después de 10 años si no realiza más depósitos?

Resolución:

Datos:

$C = \$8{,}000.00$; $i = 0.06$; $t = 10$ años; M: incógnita

Fórmula del interés compuesto: $M = C(1 + i)^t$

Sustituyendo los valores: $M = 8000(1 + 0.06)^{10} = 8000(1.06)^{10} = 14327.38$.

Después de 10 años, Luis tendrá acumulado $14,327.38 en su plan de ahorro.

2. Luis pide un préstamo de $19,000.00 con una tasa de interés compuesto del 0.7% anual. Si decide pagar el préstamo en dos años, ¿cuánto pagará al final del período?

Resolución:

Datos:

$C = \$19{,}000.00$; $i = 0.07$; $t = 2$ años; M: incógnita

Fórmula del interés compuesto: $M = C(1 + i)^t$

Sustituyendo los valores: $M = 19000(1 + 0.07)^2 = 19000(1.07)^2 = 21753.10$.

Por lo tanto, Luis pagará $21,753.10 al final del período de dos años.

3. Una empresa desea comprar una máquina que cuesta $50,000.00, si la empresa decide ahorrar $10,000.00 al final de cada año y puede obtener un interés compuesto del 8% anual, ¿en cuántos años podrá comprar la máquina? Sugerencia:

$$M = \frac{C[(1 + i)^t - 1]}{i}.$$

Resolución:

Datos:

Costo de la máquina: \$50,000.00

Depósito anual: \$10,000.00

Tasa de interés anual: 8% equivalente a 0.08

Tiempo: incógnita.

Fórmula: $M = \frac{C[(1+i)^t - 1]}{i}$.

Sustituyendo los valores: $M = \frac{10000[(1+0.08)^t - 1]}{0.08}$.

Resolviendo para t: $(0.08)(50000) = 10000[(1+0.08)^t - 1]$

$$4000 = 10000[(1.08)^t - 1]$$

$$4000 = 10000(1.08)^t - 10{,}000$$

$$10000 + 4000 = 10000(1.08)^t$$

$$14000 = 10000(1.08)^t$$

$$\frac{14000}{10000} = (1.08)^t$$

$$1.4 = (1.08)^t$$

$$\log 1.4 = \log (1.08)^t$$

$$\log 1.4 = t \cdot \log 1.08$$

$$\frac{\log 1.4}{\log 1.08} = t$$

$$4.37 \approx t$$

> Usa la propiedad de los logaritmos: $\log a^b = b \cdot \log a$
>
> Consulta el canal aprendiendo matemática https://youtu.be/U3nowFs7LTE
> *Usa la calculadora para obtener el valor del logaritmo*

La empresa podrá comprar la máquina después de 4 años.

Ahora, retomamos la situación del inicio, en el caso de la opción B elegida por Raúl: una inversión con interés compuesto a una tasa de interés del 5% capitalizable semestralmente por cinco años.

Al capitalizarse cada seis meses, la fórmula del interés compuesto $M = C(1+i)^t$, se transforma en:

$$M = C\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt}$$

donde:

M : monto final acumulado.

C : inversión inicial o principal.

i : tasa de interés anual (expresada como decimal).

n : número de veces que se capitaliza el interés en un año.

t : tiempo en años.

Luego:

$$M = 1000000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2*5} \approx 1280084.54$$

Por lo que Raúl y Elizabeth recibirán \$1,280,084.54, es decir, \$280,084.54 de interés. En consecuencia, a pesar de que el dinero se deprecie por factores como la inflación, les conviene más la opción A. Y al final de cinco años el interés total obtenido sería de \$300,000.00.

Siendo el interés compuesto una mejor opción de inversión, ¿por qué en este caso resulta mejor la opción elegida por Elizabeth?

Actividad formativa 8.2

1. María obtiene un préstamo de $7,500.00 con una tasa de interés compuesto del 6% anual. Si decide pagar el préstamo en tres años, ¿cuánto pagará al final del período? ______________
____

2. Ana deposita $6,000.00 en una cuenta de ahorros que ofrece un interés compuesto del 7% anual. Si desea tener $35,000.00 en su cuenta, ¿cuántos años le tomará alcanzar su objetivo?
____

3. Pedro decide comenzar a ahorrar para su jubilación. Él deposita $2,000.00 al año en una cuenta de inversión que ofrece un interés compuesto del 7% anual. Si Pedro planea jubilarse después de 20 años, ¿cuánto dinero tendrá acumulado en su cuenta de jubilación? Sugerencia: $M = \frac{C[(1+i)^t - 1]}{i}$. ____

4. Carlos quiere ahorrar para comprar una computadora que cuesta $20,000.00, si él deposita $6,000.00 al año en una cuenta de ahorros con un interés compuesto del 4% anual, ¿cuántos años le tomará a Carlos ahorrar lo suficiente para comprar la computadora? ______________
____

5. Juanita decide invertir $10,000.00 en un fondo de inversión que ofrece una tasa de interés anual del 8%, capitalizable trimestralmente. Si deja su inversión durante cinco años sin hacer retiros ni depósitos adicionales, ¿cuál será el monto final acumulado? __________________
____

6. Ana invierte $9,000.00 en un fondo que ofrece una tasa de interés compuesto del 0.7% anual, capitalizado bimestralmente. Después de seis años, le dice a su asesor financiero que su inversión debe haber crecido aproximadamente $17,578.33. El asesor le confirma que su cálculo es correcto, ¿es esto realmente cierto? ______________________________________
____

Inflación y Ganancia Anual Total (GAT)

Cuando empiezas a trabajar, una de las primeras cosas que te propones comprar es un automóvil. Para ello ahorras $3,000.00 mensuales y decides invertir este dinero en una cuenta de ahorros que te ofrece una tasa de interés anual del 3%. Te sientes emocionado porque en un año tendrás los $36,500.00 que cuesta el automóvil. Sin embargo, hay un factor importante que debes tener en cuenta: la inflación.

La inflación es el aumento general y sostenido de los precios de los bienes y servicios en una economía a lo largo del tiempo. En otras palabras, con la inflación, el poder adquisitivo de tu dinero disminuye. Por ejemplo, si el año pasado podías comprar una pizza por $100.00, pero este año, debido a la inflación, la misma pizza cuesta $108.00, aunque tengas más dinero en tu cuenta de ahorros, es posible que no puedas comprar tantas cosas como antes.

Aquí es donde entra en juego la Ganancia Anual Total (GAT) real, que se interpreta como la ganancia o pérdida de valor de nuestro dinero. La GAT real es una medida que tiene en cuenta no solo la tasa de interés que ganas en tus inversiones, sino también el impacto de la inflación. Es una herramienta útil para evaluar el rendimiento real de tus inversiones y determinar si estás ganando o perdiendo poder adquisitivo.

Volviendo al ejemplo de tu cuenta de ahorros con un interés anual del 3%, supongamos que la tasa de inflación anual es del 2%. Aunque tu saldo de cuenta muestre $36,500.00 después de un año, en realidad, solo habrás ganado un 1% en términos de poder adquisitivo.

La GAT real se calcula mediante la fórmula:

$$\text{GATreal} = \frac{i-f}{1+f} \times 100\%,$$

donde i es la tasa de interés y f la tasa de inflación.

Ejemplo formativo 8.3

La empresa "Inversión Segura" ofrece a sus clientes un fondo de inversión con una tasa de interés anual del 7%. Si la tasa de inflación anual es del 4%, calcula la Ganancia Anual Total real que obtendrían los clientes de "Inversión Segura".

Resolución:

Datos:

$i = 0.07$ equivalente al 7%.

$f = 0.04$ equivalente al 4%.

La fórmula para calcular el GAT real es: $GATreal = \frac{i-f}{1+f} \cdot 100\%$

Sustituyendo valores:

$$\text{GATreal} = \left(\frac{0.07 - 0.04}{1 + 0.04}\right) \cdot 100\%$$

$$\text{GATreal} = \left(\frac{0.03}{1.4}\right) \cdot 100\%$$

$$\text{GATreal} = 2.88\%$$

Por lo tanto, los clientes de "Inversión Segura" obtendrían una Ganancia Anual Total real del 2.88%. Esto significa que, ajustando por la inflación, su inversión crecería en un 2.88% en términos reales cada año.

Actividad formativa 8.3

1. La compañía "Inversiones Futuro" ofrece a sus clientes un plan de inversión con una tasa de interés anual del 5%. Si la tasa de inflación anual es del 7%, calcula la Ganancia Anual Total real que obtendrían los clientes de "Inversiones Futuro". ______________________
2. María decidió abrir una cuenta de ahorros que ofrece una tasa de interés anual del 1.5%. Si la tasa de inflación anual es del 1.5%, ¿cuál es la Ganancia Anual Total real de la inversión de María? ______________________
3. Ana decidió invertir en un certificado de depósito (CD) que ofrece una tasa de interés anual del 6.5%. Si la tasa de inflación anual es del 2.75%, ¿cuál es la Ganancia Anual Total real de la inversión de Ana? ______________________

Deudas y manejo financiero responsable

En la vida, es común enfrentarse a situaciones en las que se requiere cierta cantidad de dinero para cubrir gastos importantes, como comprar una casa, un automóvil, pagar la educación universitaria o incluso cubrir emergencias médicas. Sin embargo, no siempre se cuenta con los recursos necesarios en el momento preciso. En estos casos, una opción viable es adquirir una deuda, ya sea a través de un préstamo bancario, una tarjeta de crédito o algún otro medio de financiamiento.

Las deudas pueden ser una herramienta útil si se manejan de manera responsable, pero también pueden convertirse en una carga financiera abrumadora si no se tiene cuidado. Por lo que es importante comprender los conceptos básicos del endeudamiento y el manejo financiero para evitar problemas a futuro.

Por ejemplo, si estás planeando ir a la universidad y necesitas financiar tus estudios, solicitas un préstamo estudiantil con una tasa de interés del 6% anual. Al principio, la deuda puede parecer manejable, pero a medida que pasan los años y los intereses se acumulan, el monto total a pagar puede aumentar significativamente. Es importante tener en cuenta que los intereses se calculan sobre el saldo pendiente, lo que significa que mientras más tiempo tardes en pagar la deuda, más intereses deberás pagar.

Otro escenario común es el uso de tarjetas de crédito. Estas pueden ser muy útiles para hacer compras y pagar servicios, pero también pueden ser una trampa si no se utilizan con precaución. Si no pagas el saldo completo cada mes, los intereses se acumulan rápidamente, y una pequeña deuda puede crecer exponencialmente en poco tiempo.

Para evitar caer en un ciclo de deudas insostenibles, se debe establecer un presupuesto realista y priorizar los gastos esenciales sobre los no esenciales. Además, es recomendable pagar más del mínimo requerido en las deudas, ya que esto reducirá los intereses a largo plazo y acelerará el proceso de pago.

El nivel de endeudamiento se calcula mediante la fórmula:

$$Nivel\ de\ endeudamiento: \frac{Deuda\ mensual}{Ingreso\ mensual} \times 100\%$$

Ejemplo formativo 8.4

María tiene un salario mensual de $16,000.00 y las siguientes deudas:

- Hipoteca: $450,000.00 con una tasa de interés anual del 5%, pagadera en 20 años.
- Tarjeta de crédito: $15,000.00 con una tasa de interés anual del 22%.

Si María paga $3,000.00 al mes por su hipoteca y $500.00 al mes por su tarjeta de crédito, ¿cuál es su nivel de endeudamiento?, ¿es un nivel manejable o preocupante?

Resolución:

Datos:

Salario mensual de María: $16,000.00

Deuda de hipoteca: $450,000.00 con una tasa de interés anual del 5%.

Pago mensual de hipoteca: $3,000.00

Deuda de tarjeta de crédito: $15,000.00 con una tasa de interés anual del 22%.

Pago mensual de tarjeta de crédito: $500.00

Cálculo del nivel de endeudamiento:

Pago mensual total de deudas = Pago mensual de hipoteca + Pago mensual de tarjeta de crédito

Pago mensual total de deudas = $3,000.00 + $500.00 = $3,500.00

Nivel de endeudamiento = (Pago mensual total de deudas / Ingreso mensual) × 100%.

Nivel de endeudamiento = ($3500.00 / $16000.00) × 100%.

Nivel de endeudamiento = 21.875%.

Evaluación del nivel de endeudamiento:

Generalmente, se considera que un nivel de endeudamiento por debajo del 30% es manejable y poco riesgoso. En este caso, el nivel de endeudamiento de María es del 21.875%, lo cual se considera un nivel manejable.

Sin embargo, es importante tener en cuenta que María tiene una deuda de tarjeta de crédito considerable ($15,000.00) con una tasa de interés muy alta (22% anual). Esto, podría convertirse en un problema si no logra pagar esa deuda rápidamente, ya que los intereses crecerán exponencialmente.

Actividad formativa 8.4

1. Sofía es una estudiante universitaria que trabaja a tiempo parcial ganando $6,500.00 al mes. Tiene las siguientes deudas:
   - Préstamo estudiantil: $50,000.00 con una tasa de interés anual del 5%.
   - Tarjeta de crédito: $3,500.00 con una tasa de interés anual del 18%.

Si Sofía paga $1,300.00 al mes por su préstamo estudiantil y $400.00 al mes por su tarjeta de crédito, ¿cuál es su nivel de endeudamiento? ______________________________

¿Es un nivel manejable o preocupante? ______________________________

2. Ana y Carlos son una pareja con un ingreso mensual combinado de $35,000.00 y tienen las siguientes deudas:

- Hipoteca: $1,000,000.00 con una tasa de interés anual del 5%, pagadera en 30 años.
- Préstamo de automóvil: $350,000.00 con una tasa de interés anual del 7%.
- Tarjetas de crédito: $28,000.00 con una tasa de interés promedio anual del 20%.

Si pagan $10,500.00 al mes por su hipoteca, $8,000.00 al mes por su préstamo de automóvil y $600.00 al mes por sus tarjetas de crédito, ¿cuál es su nivel de endeudamiento? ____________

____

¿Es un nivel manejable o preocupante? ______________________________

____

Evaluación formativa 8.1

1. Juan tiene un negocio de venta de artículos de oficina y desea invertir parte de sus ganancias en un plan de ahorro a largo plazo. Él está considerando dos opciones de inversión:

   Opción A: invertir $50,000.00 en una cuenta de ahorros que ofrece una tasa de interés anual del 5% capitalizable mensualmente.

   Opción B: invertir $50,000.00 en un fondo de inversión que ofrece una tasa de interés anual del 6% capitalizable trimestralmente.

   Construye un modelo matemático para comparar ambas opciones y determinar cuál le proporcionará un mayor monto de dinero después de 10 años.

2. Karen invirtió $10,000.00 en un fondo de ahorro que generó un rendimiento anual del 8% durante un período de 3 años. Los precios de los bienes y servicios al inicio de su inversión y al final del período de 3 años se muestran a continuación:

   Año 1: precio de una canasta de bienes y servicios es igual a $100.00.

   Año 3: precio de la misma canasta de bienes y servicios es igual a $112.00.

   Calcula la tasa de inflación promedio $\left[\left(\frac{Precio\_final}{Precio\_inicial}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] \times 100\%$ (donde n es el número de años) y la Ganancia Anual Total real de la inversión de Karen.

3. Pedro y María tienen un ingreso mensual combinado de $25,000.00 y sus deudas son las siguientes:

   Hipoteca: $450,000.00 con una tasa de interés anual del 4%, pagadera en 20 años.

   Préstamo estudiantil: $80,000.00 con una tasa de interés anual del 6%.

   Tarjetas de crédito: $15,000.00 con una tasa de interés promedio anual del 22%.

   Actualmente pagan $2,500.00 al mes por su hipoteca, $800.00 al mes por su préstamo estudiantil y $500.00 al mes por sus tarjetas de crédito. ¿Es su nivel de endeudamiento manejable o preocupante en relación con su ingreso mensual?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: _________ Grupo:_____ Turno:______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 8. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identifiqué las variables para el cálculo de interés simple y compuesto. (M2-C3)			
Expliqué el efecto de la inflación en la ganancia actual, usando lenguaje matemático y natural. (M1-C4)			
Comenté los descubrimientos sobre la adquisición de deudas y su manejo responsable. (M2-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

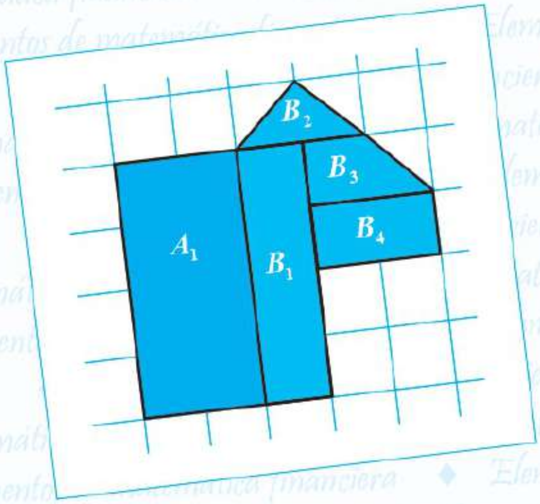
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 8, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Identificó las variables para el cálculo de interés simple y compuesto. (M2-C3)			
Explicó el efecto de la inflación en la ganancia actual, usando lenguaje matemático y natural. (M1-C4)			
Comentó los descubrimientos sobre la adquisición de deudas y su manejo responsable. (M2-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Figuras geométricas planas y su área



Progresión de aprendizaje 9

Conceptualiza el área de una superficie y deduce fórmulas para calcular áreas de figuras geométricas simples como rectángulos, triángulos, trapecios, etc., utilizando principios y propiedades básicas de geometría sintética.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			

La geometría y el álgebra, aunque son distintas ramas de las matemáticas, se complementan en el estudio de las formas y el espacio. Mientras la geometría se centra en el análisis de figuras y sus propiedades mediante métodos visuales y deductivos, el álgebra aporta herramientas para cuantificar y generalizar estas relaciones. Por ejemplo, al resolver problemas, cuando se requiere, usamos representaciones geométricas, y en el cálculo de áreas, usamos modelos y aplicamos algoritmos algebraicos.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 9.1

Relaciona las siguientes preguntas con su posible respuesta.

1. Porción del plano limitada por tres rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices.	( ) Polígono regular
2. Paralelogramo con cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.	( ) Trapecio
3. Paralelogramo con cuatro ángulos rectos.	( ) Cuadrado
4. Superficie del plano limitado por una circunferencia.	( ) Triángulo
5. Polígono donde todos sus lados y ángulos interiores miden lo mismo y tienen la propiedad de que es posible inscribirlos en una circunferencia, es decir, todos sus vértices están en la circunferencia.	( ) Rectángulo
6. Cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos.	( ) Círculo

Las figuras geométricas regulares e irregulares se encuentran en todas partes a nuestro alrededor, tanto en el mundo natural como en el mundo creado por el hombre. Cada tipo de figura tiene sus propias propiedades y aplicaciones, que juegan un papel importante en nuestra vida cotidiana. Como lo muestran las Figuras 9.1 y 9.2.

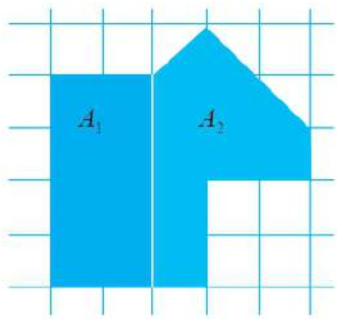


Figura 9.1. Terrenos de áreas con figuras irregulares.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Supón que deseas adquirir un terreno y tienes dos opciones de compra como se muestra en la Figura 9.1. Ambos terrenos tienen el mismo precio y la misma calidad de tierra, así que eliges el más grande. Para ello, descargas de un sitio de internet una fotografía aérea que abarca los dos terrenos. ¿Cómo determinarías cual es el terreno más grande?

En la Figura 9.2 se tiene el cuadrado $ABCD$ de 32 cm de lado, R y S son puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. ¿Cómo determinarías el área sombreada?

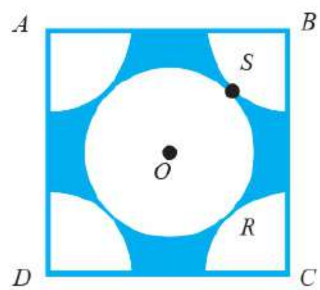


Figura 9.2. Área con forma irreguf lar.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Áreas de figuras geométricas simples

El área es una medida que se utiliza para cuantificar el tamaño de una superficie en dos dimensiones, es decir, cuánto espacio ocupa esta superficie en el plano y se expresa en unidades cuadradas: metros cuadrados (m^2), centímetros cuadrados (cm^2), kilómetros cuadrados (km^2), etc.; estas unidades pertenecen al Sistema Internacional de Unidades (SIU). Existen otros sistemas de unidades como el Sistema Inglés, en el cual se manejan las siguientes unidades cuadradas: Pies cuadrados (ft^2), Pulgadas cuadradas (in^2), yardas cuadradas (yd^2), etc.

En términos más simples, el área nos permite cuantificar la superficie encerrada por una figura geométrica. Por ejemplo, el área de un rectángulo nos indica cuántos metros cuadrados de espacio ocupa su superficie.

El cálculo del área varía según la forma de la figura. Para figuras simples como rectángulos, triángulos, círculos y trapecios, existen fórmulas específicas basadas en principios geométricos que nos permiten calcular su área.

Triángulos

Un **triángulo** es una porción del plano limitada por tres rectas que se intersecan una a una en puntos llamados vértices, como se muestra en la Figura 9.3.

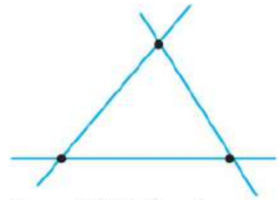


Figura 9.3. Triángulo. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024). 2024).

Base y altura de un triángulo (Figura 9.4)

Base: es uno cualquiera de sus lados.

Altura: es un segmento perpendicular desde uno de sus vértices a la recta que contiene al lado opuesto de dicho vértice.

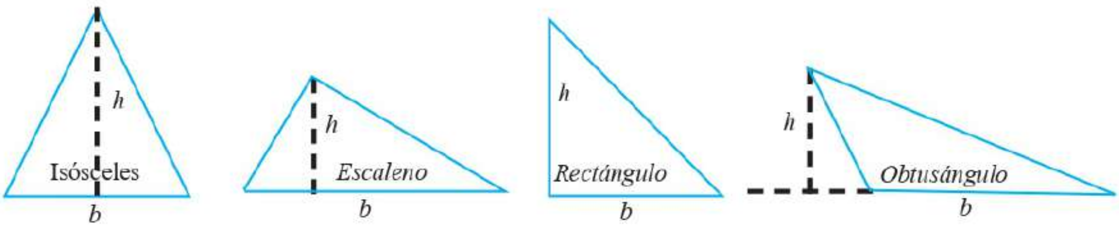


Figura 9.4. Base y altura de un triángulo. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Propiedades de los triángulos:

1. En todo triangulo, el segmento que une los puntos medios es paralelo al lado restante y su longitud es igual a la mitad de la longitud de dicho lado.
2. La suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 180°.
3. Dos **triángulos** son **congruentes** o iguales si y solamente si, tienen exactamente el mismo tamaño y la misma forma. Si dos triángulos son congruentes, entonces los ángulos y lados correspondientes son congruentes o iguales.
4. Dos **triángulos** son **semejantes** si sus ángulos respectivos son iguales, y sus lados homólogos son proporcionales.
5. La **Mediana** de un triángulo es un segmento que conecta un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto de dicho vértice. El punto donde concurren las medianas se denomina baricentro o centroide. Ese punto es el centro de gravedad del triángulo. Las medianas dividen un triángulo en seis triángulos que tienen la misma área.

Ejemplo formativo 9.1

En la Figura 9.5, A, B y C son los puntos medios de los lados del ΔRST, además $\angle STR = 90°$. Determina el área del ΔABC, si $\overline{RT} = 30$ cm, $\overline{RS} = 34$ cm y $\overline{ST} = 16$ cm.

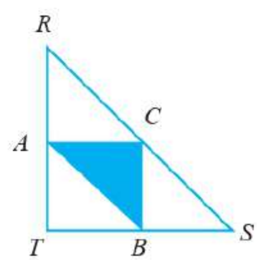


Figura 9.5. Área del ΔABC. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:
Utilizando la propiedad sobre los puntos medios de los lados del triángulo se tiene que: $\overline{AC} = 8$ cm, $\overline{BC} = 15$ cm y $\overline{AB} = 17$ cm, por lo que $\Delta BAC \sim \Delta RST$, entonces el área sombreada es

$$A_s = \frac{bh}{2} = \frac{15(8)}{2} = 60$$

Por tanto, el área del triángulo ABC es de 60 cm².

Actividad de formativa 9.1

1. Calcula el área del ΔBAC rectángulo en A, si $\overline{BD} = 5$ cm, $\overline{CF} = 20$ cm y $DEFA$ es un cuadrado de 4 cm por lado.

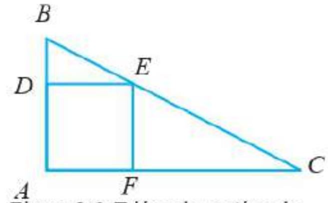


Figura 9.6. Triángulo rectángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

2. Una vela triangular de una barca se ha estropeado y hay que sustituirla por otra. Para confeccionar la nueva vela cobran $690 por metro cuadrado. ¿Cuánto costará esa nueva vela si debe tener 8 m de alto y 3 m de base?

3. Calcula el área del siguiente triángulo.

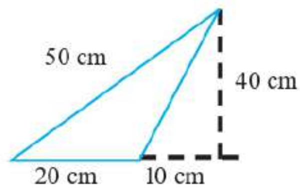


Figura 9.7. Triángulo escaleno.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Cuadriláteros

Un cuadrilátero es una figura cerrada que se forma con cuatro segmentos de recta, que se interceptan por pares en cuatro puntos llamados vértices. Dos cuadriláteros muy conocidos y que el cálculo de sus áreas es simple, son el cuadrado y el rectángulo.

Un **cuadrado** es una figura formada por cuatro lados, todos de igual longitud (l) y ángulos rectos. La fórmula para determinar su área es: $A = l^2$.

Un **rectángulo** es una figura plana de cuatro lados en la que cada ángulo es un ángulo recto. Los lados opuestos son paralelos y de igual longitud. Dos son llamados bases (b) y los otros dos, alturas (a). La fórmula para determinar su área es: $A = b \cdot a$.

Un paralelogramo es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos entre sí.

Propiedades de los cuadriláteros:

- Las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.
- Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
- Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
- Las diagonales de un rectángulo son iguales.

Ejemplo formativo 9.2

En la Figura 9.8, se muestra que el área de la región sombreada es de 600 cm^2 M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Hallar el área del cuadrado $ABCD$.

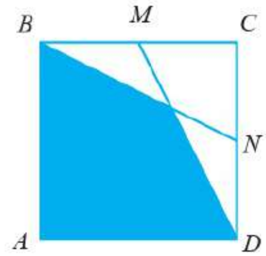


Figura 9.8. Región sombreada del cuadrado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Se trazan las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

M es el punto medio de $\overline{BC}$.

$\overline{DM}$ es mediana del ΔDCB

N es el punto medio de $\overline{CD}$.

$\overline{BN}$ es mediana del ΔDCB.

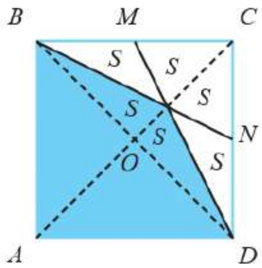


Figura 9.9. Diagonales del cuadrado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

El ΔDCB se dividió en seis triángulos iguales (ver Figura 9.9), esto, de acuerdo con la propiedad de las medianas; en consecuencia, tienen la misma área S.

Por otra parte, por ser $\Delta DAB \cong \Delta DCB$, en el ΔDAB, usando la propiedad de las medianas $\overline{DP}$ y $\overline{BQ}$, se pueden construir de igual forma seis triángulos con áreas iguales como en la Figura 9.10.

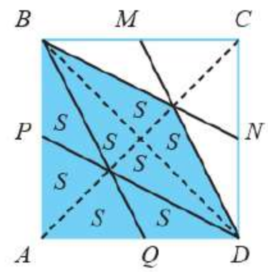


Figura 9.10. Triángulos de área S.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Así, el área sombreada está formada por ocho triángulos de área S.

$$8S = 600$$
$$S = \frac{600}{8}$$
$$S = 75$$

Por lo que cada triángulo tiene un área $S = 75$ cm^2.

Dado que el cuadrado $ABCD$ está formado por 12 triángulos de área $S = 75$ cm^2, entonces el área total es de 900 cm^2.

Actividad de aprendizaje 9.2

Encontrar el área del cuadrado $ABCD$ si $\overline{AC} = \sqrt{3}$.

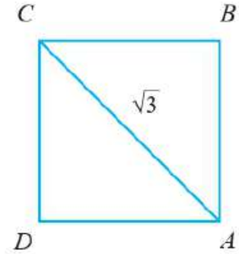


Figura 9.11. Cuadrado $ABCD$.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Trapecios

Un trapecio es un cuadrilátero (figura plana de cuatro lados) con un par de lados paralelos. Los lados paralelos reciben el nombre de base mayor y base menor. La altura de un trapecio es la medida que separa sus bases, como se muestra en la Figura 9.12.

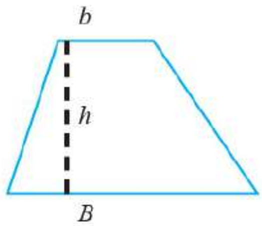


Figura 9.12. Trapecio.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Elementos del trapecio:

B: base mayor

b: base menor

h: altura

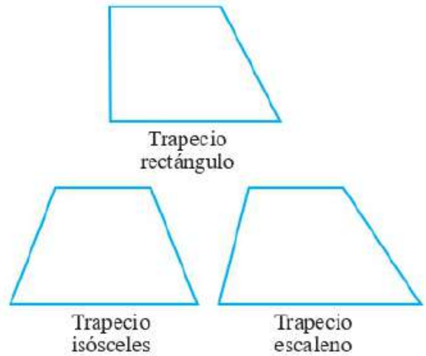


Figura 9.13. Tipos de trapecio.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Área de un trapecio

Para un trapecio que tiene bases, B y b, y una altura, h, la fórmula para calcular su área es:

$$A = \frac{(B + b)h}{2}$$

Propiedades de los trapecios (Figura 9.13)

- Un trapecio isósceles es un trapecio cuyos lados no paralelos son de la misma longitud.
- Un trapecio rectángulo tiene dos ángulos rectos.
- Un trapecio escaleno tiene los lados no paralelos desiguales.
- Los ángulos consecutivos que están entre las bases de un trapecio son suplementarios.

Ejemplo formativo 9.3

Calcular el área de la Figura 9.14.

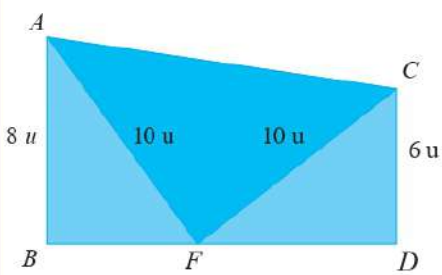


Figura 9.14. Trapecio rectángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Primero hay que determinar la longitud de los catetos faltantes en los triángulos FAB y DCF.

ΔFAB	ΔDCF
$BF^2 + AB^2 = AF^2$	$FD^2 + DC^2 = FC^2$
$F^2 + 64 = 100$	$FD^2 + 36 = 100$
$BF^2 = 100 - 64$	$FD^2 = 100 - 36$
$BF^2 = \sqrt{36}$	$FD = \sqrt{64}$
$BF = 6$	$FD = 8$

Luego, el área total del trapecio $ABDC$ se calcula con la fórmula:

$$A = \frac{(B + b)\,h}{2} = \frac{(8 + 6)\,(14)}{2} = 98$$

Ejemplo formativo 9.4

Retomamos la situación inicial. Supón que vas adquirir un terreno y tienes dos opciones de compra como se observa en la Figura 9.15. Ambos terrenos tienen el mismo precio y la misma calidad de tierra, así que eliges el más grande. Para ello, descargas de un sitio de internet una fotografía aérea que abarca los dos terrenos. ¿Cómo determinas cual es el terreno más grande si los lados de cada cuadrado miden 10 m?

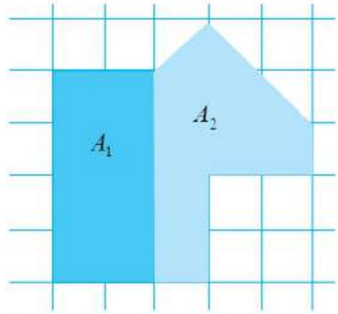


Figura 9.15. Terrenos de áreas con figuras irregulares.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Primeramente, calcula el área A_1, que es un rectángulo,

$$A_1 = b \cdot h = 20 \cdot 40 = 800 \text{ m}^2$$

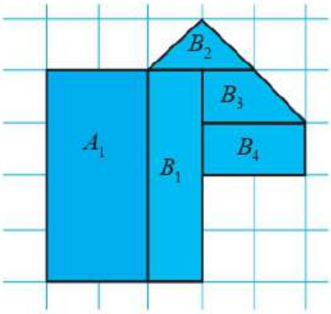


Figura 9.16. Áreas de terrenos divididas en figuras geométricas conocidas.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Ahora, divide el área A_2 en figuras geométricas conocidas, como se hizo en la Figura 9.16. Luego calcula las áreas B_1, B_2, B_3 y B_4 que corresponden al terreno de área A_2.

El Área A_2 consta de cuatro figuras con áreas B_1, B_2, B_3 y B_4.

$$B_1 = b \cdot h = 10 \cdot 40 = 400$$

$$B_2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100$$

$$B_3 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{(20 + 10)\,(10)}{2} = 150$$

$$B_4 = b \cdot h = 20 \cdot 10 = 200$$

$$A_2 = 400 + 100 + 150 + 200 = 850$$

Dado que A_1 tiene un área de 800 m^2 y A_2 un área 850 m^2, conviene adquirir el terreno correspondiente a A_2.

Actividad de aprendizaje 9.3

Calcula el área de los siguientes trapecios. En la Figura 9.18 la región entre las líneas punteadas es un cuadrado.

a)

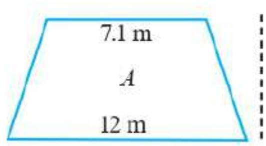


Figura 9.17. Trapecio isóceles de área A.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

b)

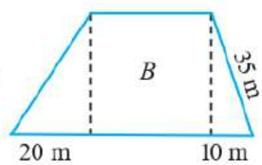


Figura 9.18. Trapecio de área B.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Polígonos regulares

En la Figura 9.19, mostramos polígonos regulares.

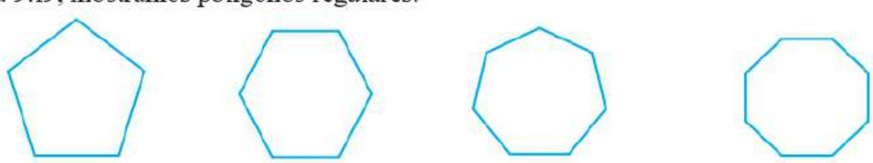


Figura 9.19. Polígonos regulares. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

La **Apotema** (a) de un polígono regular es el segmento de línea perpendicular trazado desde el centro del polígono a uno de sus lados (ver Figura 9.20).

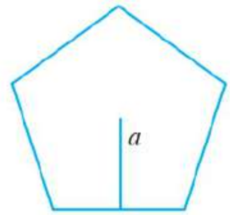


Figura 9.20. Apotema (a) de un polígono regular. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Las apotemas de un polígono regular son iguales.

Para calcular el área de un polígono regular se usa la siguiente fórmula:

$$A = \frac{Pa}{2}$$

Donde A es el área, P el perímetro y a la apotema.

Ejemplo formativo 9.5

Un hexágono está inscrito y otro está circunscrito a una circunferencia de radio 6 cm, como se muestra en la Figura 9.21. Determina el área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos.

Resolución:

El área sombreada A_s, es el área del hexágono circunscrito A_c menos el área del hexágono inscrito A_i.

$$A_s = A_c - A_i$$

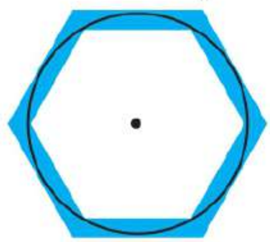


Figura 9.21. Hexágono inscrito y otro circunscrito a una circunferencia. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

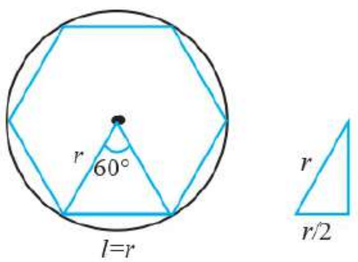


Figura 9.22. Hexágono inscrito. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Para calcular el área del hexágono inscrito considera la Figura 9.22.

La medida del ángulo central es $\theta = \frac{360°}{6} = 60°$.

Como el triángulo es equilátero se tiene $l = r = 6$ cm.

La apotema la puedes calcular utilizando el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = a^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2;\ 6^2 = a^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2;\ 36 = a^2 + 9$$

$$a^2 = 36 - 9 = 27\ ;\ a = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

Entonces, el área del hexágono inscrito es $A_i = \frac{Pa}{2} = \frac{(6 \cdot 6)(3\sqrt{3})}{2} = \frac{(36)(3\sqrt{3})}{2} = 18(3\sqrt{3}) = 54\sqrt{3}$

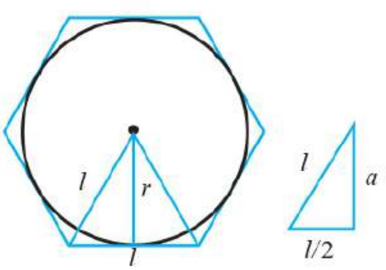


Figura 9.23. Hexágono circunscrito. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Para el hexágono circunscrito a la circunferencia, los elementos se muestran en la Figura 9.23. En un hexágono circunscrito a una circunferencia la apotema es igual al radio de la circunferencia y se utiliza el teorema de Pitágoras para calcular l.

$$a = r = 6$$

$$l^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 6^2 \Rightarrow l^2 - \frac{l^2}{4} = 36 \Rightarrow \frac{3l^2}{4} = 36$$

$$l = \sqrt{\frac{4 \cdot 36}{3}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{36}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$$

Entonces, el área del hexágono circunscrito es

$$A_c = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{\left(\frac{12}{\sqrt{3}} \cdot 6\right)(6)}{2} = \frac{(72)(6)}{2\sqrt{3}} = \frac{432}{2\sqrt{3}} = \frac{216}{\sqrt{3}}$$

Finalmente, el área sombreada es

$$A_s = \frac{216}{\sqrt{3}} - 54\sqrt{3} \approx 31.18$$

El área de la región que se encuentra entre los dos hexágonos es aproximadamente 31.18 cm^2.

Actividad formativa 9.4

Jesús quiere decorar una pared de 200 cm de ancho y 300 cm de alto del baño de su casa, con un azulejo de forma hexagonal como el que se muestra en la Figura 9.24. ¿Cuántas piezas necesita Jesús para decorar la pared?

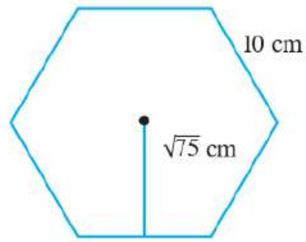


Figura 9.24. Hexágono.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Circunferencia y círculo

La circunferencia es una curva cerrada cuyos puntos están en el mismo plano y a igual distancia de otro punto interior fijo que se llama centro de la Circunferencia. El círculo es la superficie del plano limitado por la circunferencia (Figura 9.25).

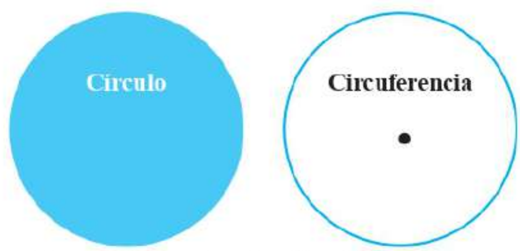


Figura 9.25. Círculo y circunferencia.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Elementos principales del círculo:

- **Radio.** Es el segmento que une el centro de la circunferencia con un punto cualquiera de la misma. Su longitud se denota con la letra r.
- **Diámetro.** Es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Centro.** Es el punto interior desde el que se mide la distancia a cualquier otro punto de la circunferencia.
- La longitud de una circunferencia se calcula mediante la fórmula $l = 2\pi r$, donde l es la longitud de la circunferencia, r es el radio y π es una constante.
- El área de cualquier círculo se determina mediante la fórmula $A = \pi r^2$, donde A es el área del círculo, r es el radio y π es una constante.

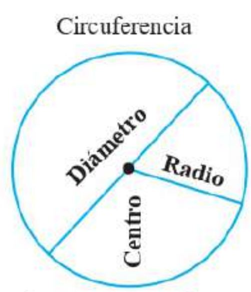


Figura 9.26. Elementos principales del círculo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Ángulos asociados a una circunferencia:

- **Ángulo central** es aquel que está formado por dos radios. Los ángulos centrales tienen su vértice en el centro de la circunferencia.
- **Ángulo inscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son secantes de la circunferencia.
- **Ángulo semiinscrito** es aquel que tiene su vértice en la circunferencia y uno de sus lados es secante y el otro tangente a la circunferencia.
- **Un sector circular** es una porción de un círculo comprendida entre dos radios y el arco de circunferencia que conecta sus extremos. Se puede visualizar como una "rebanada" de un círculo.
- La medida de un ángulo inscrito en la circunferencia es la mitad de la medida del ángulo central que subtiende igual arco.
- Los ángulos inscritos que cortan el mismo arco son iguales.

QR 9.1 Video de ángulos asociados a una circunferencia.
Fuente: Parzibyte 2024.

En el código QR 9.1 puedes observar los ángulos asociados a la circunferencia.

Ejemplo formativo 9.6

En la Figura 9.27, *ABCD* es un cuadrado de 32 cm de lado, *R* y *S* son puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, y las figuras de las esquinas del cuadrado son cuartos de circunferencia. Determina el área sombreada.

Resolución:

Para determinar el área sombreada, al área del cuadrado se le resta el área del círculo central y la de los 4 cuartos de círculo.

Primero, se calcula la diagonal $\overline{AC}$, como se forman dos triángulos rectángulos, se utiliza el teorema de Pitágoras:

$$AC=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DC}^2}=\sqrt{32^2+32^2}=\sqrt{2(32)^2}=32\sqrt{2}$$

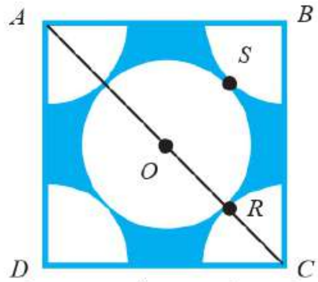


Figura 9.27. Área con forma irreo gular.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Como *R* y *S* son puntos medios de $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ respectivamente, se tiene que $\overline{OR}=\overline{RC}$ y $\overline{OS}=\overline{SB}$, por lo que el radio de la circunferencia central es igual al radio de los cuartos de circunferencia, el cuál es igual a $\frac{\overline{AC}}{4}$. Entonces, para calcular el área sombreada A_s, al área del cuadrado A_{cu} se le resta el área de dos círculos $2A_{ci}$.

$$A_s=A_{cu}-2A_{ci}\,;\ A_{cu}=l^2=32^2=1024\,;\ 2A_{ci}=2\pi r^2$$

Donde:

$$r=\frac{\overline{AC}}{4}=\frac{32\sqrt{2}}{4}=8\sqrt{2}$$

Luego $A_{ci}=2\pi(8\sqrt{2})^2=256\pi\approx 804.25$. Por lo que $A_s=1024-804.25=219.75$.

Por lo tanto, el área sombreada es 219.75 cm^2

Ejemplo formativo 9.7

En la Figura 9.28, O es el centro del círculo cuyo radio mide 9 cm. Si $\angle BOA$ mide 40°, ¿cuál es el área del sector circular sombreado?

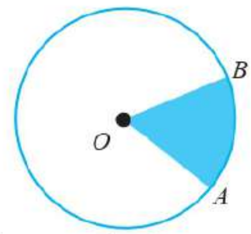


Figura 9.28. Área de un sector circular.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

La fórmula para calcular el área del sector circular es $A_s = \frac{\theta}{360°}\pi r^2$, donde θ es el ángulo central y r es el radio de la circunferencia.

Para $\theta = \angle BOA = 40°$ y $r = 9$, el área sombreada A_s es

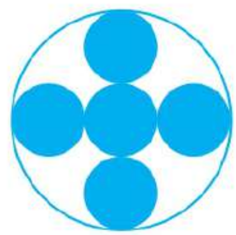
$$A_s = \frac{\theta}{360°}\pi r^2 = \frac{1}{9}\pi (9)^2 = 9\pi$$

Por lo que el área del sector circular sombreado es 9π cm^2.

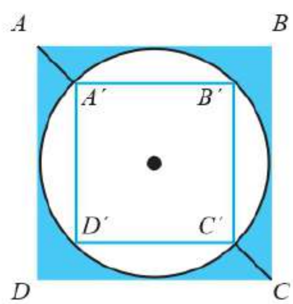
Actividad formativa 9.5

1. Halla el área del sector circular sombreado cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito, si el radio de la circunferencia es 2 cm.

2. Determina el área de la zona no sombreada de la figura de la derecha, si el diámetro del círculo mayor mide 18 cm.



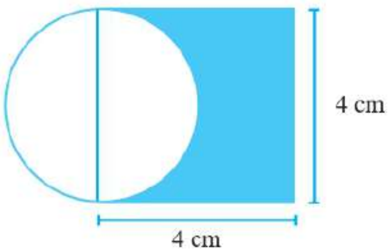
3. Si en la figura de la derecha, $ABCD$ es un cuadrado y el área del cuadrado $A'B'C'D'$ es 392 cm^2, determina el área sombreada.



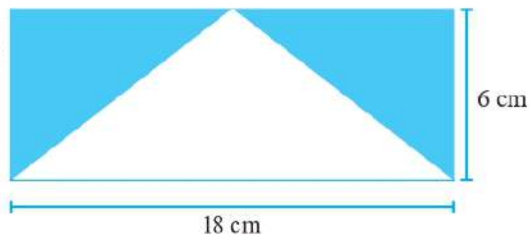
EVALUACIÓN FORMATIVA 9.1

1. Calcula el área sombreada de las siguientes figuras.

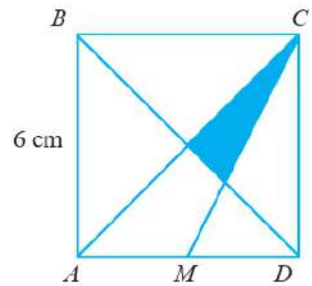
a)



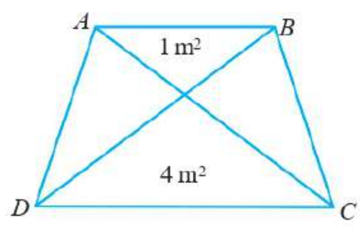
b)



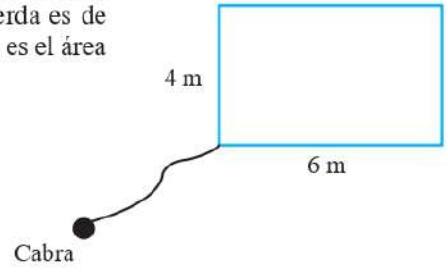
2. Si $ABCD$ es un cuadrado cuyo lado mide 6 m, y además M es el punto medio de $\overline{AD}$; calcula el área de la región sombreada.



3. Calcula el área del trapecio isóceles.



4. Una cabra está atada a una esquina exterior de una cabaña rectangular de 6 m de largo y un ancho de 4 m, la cuerda es de 8 m como se muestra en la imagen de la derecha. ¿Cuál es el área donde la cabra puede pastar?



AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ________________________ Plantel: __________ Grupo:_____ Turno:______

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 9. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Resolví problemas del cálculo de áreas aplicando procedimientos algebraicos y propiedades geométricas de las figuras. (M2-C1)			
Usé la intuición para calcular el área de figuras geométricas no regulares. (M2-C2)			
Deduje propiedades geométricas de las figuras que facilitan el cálculo del área. (M4-C2)			

Coevaluación para el aprendizaje

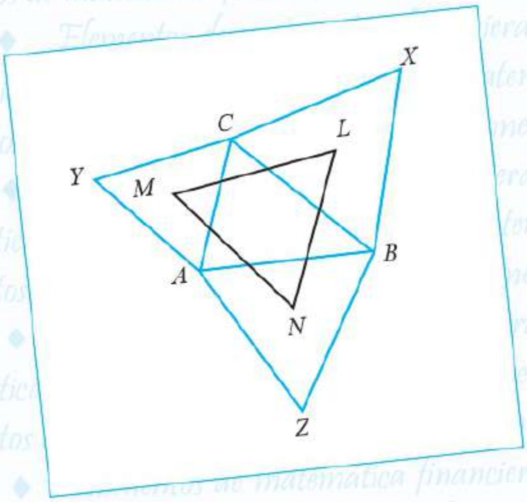
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 9, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Resolvió problemas del cálculo de áreas aplicando procedimientos algebraicos y propiedades geométricas de las figuras. (M2-C1)			
Usó la intuición para calcular el área de figuras geométricas no regulares. (M2-C2)			
Dedujo propiedades geométricas de las figuras que facilitan el cálculo del área. (M4-C2)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Aplicación de resultados de la geometría euclidiana, teorema del triángulo de Napoleón



Progresión de aprendizaje 10

Revisa el teorema del triángulo de Napoleón, considerándolo como un problema-meta en el que se aplican resultados de la geometría euclidiana como: Teorema de Pitágoras, criterios de congruencia y semejanza de triángulos, caracterizaciones de cuadriláteros concíclicos, entre otros.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M1-C2 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.	A			
	C			
	H			
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M2-C4 Socializa con sus pares, sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema, a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 10.1

Selecciona la respuesta correcta.

1. El baricentro o punto medio de un triángulo es el punto donde coinciden:
   a) Las alturas del triángulo.
   b) Las mediatrices del triángulo.
   c) Las medianas del triángulo.

2. Si dos triángulos tienen respectivamente iguales todos sus ángulos, entonces:
   a) Son congruentes o iguales.
   b) Son semejantes.
   c) No se puede afirmar que existe una relación entre ellos.

3. En un salón de clases la razón entre el número de hombres y mujeres es de dos a tres. Si en el salón hay 12 hombres, ¿cuál es el total de alumnos en el salón?
   a) 18 b) 30 c) 36

¿Por qué son importantes los triángulos?

En la historia de las matemáticas los triángulos son muy importantes, ya que son figuras geométricas fundamentales y simples, lo cual es muy útil para comprender conceptos matemáticos básicos como proporciones, relaciones angulares y de la geometría euclidiana. También tienen propiedades únicas, relevantes y de gran aplicación en trigonometría y geometría analítica.

Por ejemplo, el teorema de Pitágoras se ha utilizado durante siglos en arquitectura y en el diseño de estructuras, se ha utilizado en la construcción de edificios y monumentos con formas específicas y medidas exactas, además de utilizarse en una gran variedad de campos, desde la cartografía y la navegación hasta la ingeniería y la física.

Teorema de Pitágoras

¿Por qué es útil el teorema de Pitágoras en nuestra vida cotidiana? Imagina que estás parado frente a un edificio y quieres saber cuánto mide de alto, pero te es imposible medirlo directamente. ¿Sabías que con el teorema de Pitágoras puedes lograrlo?

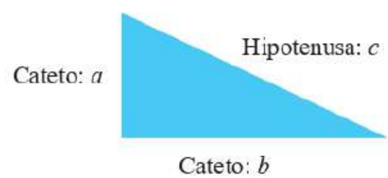


Figura 10.1. Triángulo rectángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

El triángulo rectángulo se caracteriza por tener dos lados menores, conocidos como catetos (para ser más específico, cateto a y cateto b), y un lado, siendo el más largo, que se denomina hipotenusa que comúnmente se representa mediante la letra c, como se muestra en la Figura 10.1. Además, se forma un ángulo recto de 90° entre los catetos.

El teorema surge de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, por lo que, mediante este, teorema se puede calcular la medida de uno de sus lados conociendo las de los otros dos.

Entonces podemos decir que: "*En todo triángulo rectángulo, la suma de las longitudes de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa*". En lenguaje matemático se representa como $c^2 = a^2 + b^2$ y de forma geométrica en la Figura 10.2.

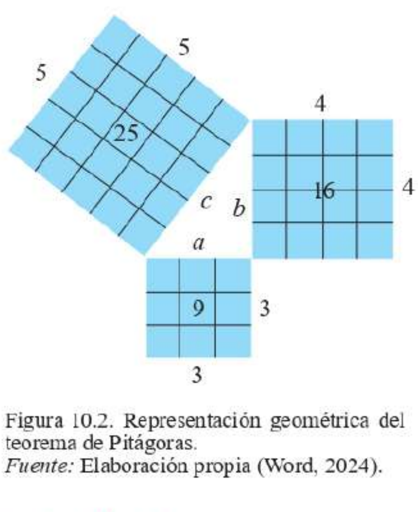


Figura 10.2. Representación geométrica del teorema de Pitágoras.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Ejemplo formativo 10.1

Encuentra el valor de la hipotenusa en el triángulo rectángulo de la Figura 10.3.

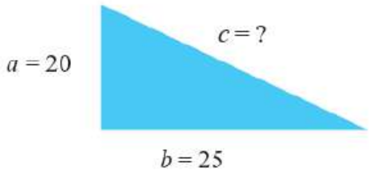


Figura 10.3. Triángulo rectángulo con valor de la hipotenusa desconocido.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = (20)^2 + (25)^2$

$c^2 = 400 + 625$

$c = \sqrt{1025}$

$c = \sqrt{25 \cdot 41}$

$c = 5\sqrt{41}$

Por lo tanto, la hipotenusa mide $5\sqrt{41}$ unidades.

1. ¿Cómo queda la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, si el valor que se desconoce es a?

2. ¿Cómo queda la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, si el valor que se desconoce es b?

El teorema de Pitágoras, se puede utilizar para determinar las longitudes de cada uno de los lados de un triángulo rectángulo siempre y cuando, se conozca al menos el valor de dos de los lados de la Figura 10.4, para poder calcular el tercero. Otra de sus aplicaciones de gran utilidad, es el cálculo de distancias desconocidas.

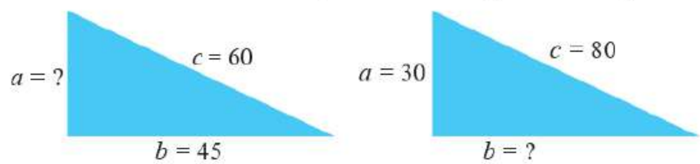


Figura 10.4. Triángulos rectángulos con el valor de un cateto desconocido.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Ejemplo formativo 10.2

Se quiere colocar un cable como se muestra en la Figura 10.5, desde la cima de una torre que mide 10 metros de altura hasta un punto situado a 40 metros de la base de la torre, ¿cuánto debe medir el cable?

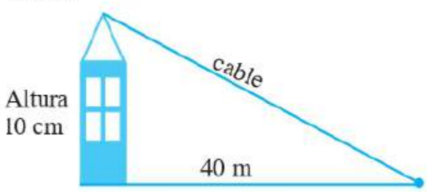


Figura 10.5. Distancia de un punto fijo a la punta de la torre.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Altura de la torre: 10 m

Distancia a la torre: 40 m

Longitud del cable: **?**

$a^2 + b^2 = c^2$

$(10)^2 + (40)^2 = c^2$

$100 + 1600 = c^2$

$1700 = c^2$

$\sqrt{1700} = c$

$\sqrt{100 \cdot 17} = c$

$10\sqrt{17} = c$

El cable debe medir $10\sqrt{17}$ metros.

Actividad formativa 10.1

La carretera internacional México 15, es perpendicular a la carretera cero como se muestra en la Figura 10.6. El empaque *VITANOVA–Fresh Produce,* tiene su acceso de entrada de insumos y salida de producción, sobre la carretera cero (punto 1); misma que está en reparación, motivo por el cual no pueden circular camiones de carga. Para no detener su producción, los propietarios del empaque han optado por habilitar un camino que llegue a la carretera internacional (punto 2), pero necesitan calcular los costos de habilitar este camino.

¿Cómo calcularías la distancia del punto, correspondiente a la salida de producción empaque *VITANOVA–Fresh Produce*, al punto 2 para ingresar a la carretera internacional México 15? Además, si por cada km lineal una máquina cobra $12,000.00 por limpiar el camino, ¿cuál será el costo de habilitarlo?

Figura 10.6. Ubicación del empaque VITANOVA – *Fresh produce*.
Fuente: Google Maps, 2024.

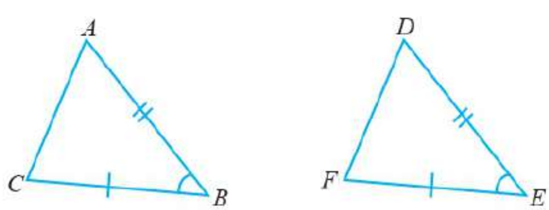
Criterios de congruencia

La congruencia de objetos matemáticos, es importante para la solución de problemas en contextos muy variados como ingeniería, aeronáutica, construcción, arquitectura, diseño de autopartes, mecatrónica etc., y en estos casos se aplican triángulos que permiten comparar y relacionar.

En geometría, el término congruencia se emplea para decir que dos figuras son iguales.

Dos triángulos son congruentes, si sus ángulos y lados correspondientes coinciden exactamente al acomodarlos uno sobre otro, o sea, son exactamente iguales. Es posible determinar si dos triángulos son congruentes, sin medir sus lados o sus ángulos y sin sobreponer uno sobre otro. Para ello, se utilizan los criterios de congruencia.

Primer criterio de congruencia. Lado-Ángulo-Lado (LAL). Dos triángulos son congruentes, si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son iguales en ambos triángulos.

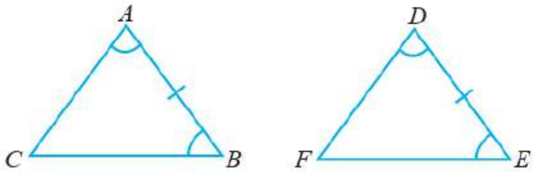


$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por LAL

Figura 10.7. Criterio de Congruencia Lado-Ángulo-Lado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Interpretación. En la Figura 10.7, si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle B \cong \angle E$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, automáticamente se cumple que: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ $\angle A \cong \angle D$ y $\angle C \cong \angle F$.

Segundo criterio de congruencia. Ángulo-Lado-Ángulo (ALA). Dos triángulos son congruentes, si un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado son iguales en ambos triángulos.



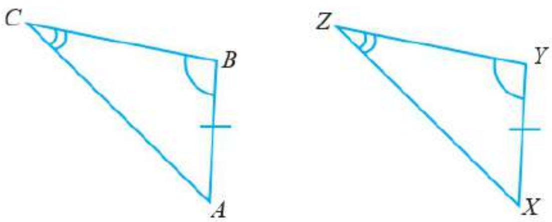
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por ALA

Figura 10.8. Criterio de Congruencia Ángulo-Lado-Ángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Interpretación. En la Figura 10.8, si $\angle A \cong \angle D$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\angle B \cong \angle E$, automáticamente se cumple que: $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, $\angle C \cong \angle F$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$.

Aplicando la propiedad del tercer ángulo, y el criterio ALA, se puede establecer otro criterio de congruencia.

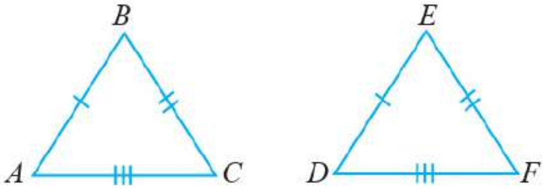
Tercer criterio de congruencia. Dos triángulos son congruentes, si dos ángulos y el lado no comprendido entre ellos son iguales en ambos triángulos.



$\Delta BAC \cong \Delta YXZ$ por AAL o LAA

Figura 10.9. Criterio de Congruencia Ángulo-Ángulo-Lado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Interpretación. En la Figura 10.9, si $\angle C \cong \angle Z$, $\angle B \cong \angle Y$ y $\overline{BA} \cong \overline{YX}$, automáticamente se cumple que: $\angle A \cong \angle X$, $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ y $\overline{CB} \cong \overline{ZY}$.



$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ por LLL

Figura 10.10. Criterio de Congruencia Lado-Lado-Lado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Cuarto criterio de congruencia. Lado-Lado-Lado (LLL). Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Interpretación. En la Figura 10.10, si, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CA} \cong \overline{FD}$, automáticamente se cumple que: $\angle A \cong \angle D$, $\angle B, \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$.

Actividad formativa 10.2

Para reforzar el tema, observa el video del código QR 10.1 y escribe tus conclusiones.

QR 10.1. Video sobre los criterios de Congruencia de triángulos.
Fuente: Parzibyte, 2024.

Semejanza de triángulos

Se dice que el padre de la geometría, Tales de Mileto (625-547 a.C.) calculó la altura de la columna de un templo sin necesidad de instrumentos especiales, simplemente comparando la longitud de la sombra de su bastón con la de la columna y aplicando la semejanza de triángulos. Con el mismo método, consiguió medir la altura de la Gran Pirámide de Egipto y así impresionar al faraón. A continuación, se explican los diferentes criterios de semejanza que existen:

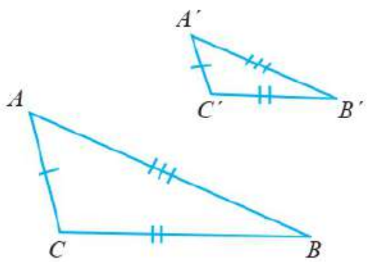


Figura 10.11. Criterio de semejanza Lado-Lado-Lado.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Primer criterio de semejanza. Lado-Lado-Lado (LLL). En la Figura 10.11, si las medidas de los lados homólogos de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.

$$\text{Si } \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'} \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

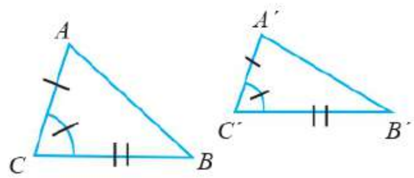


Figura 10.12. Criterio de semejanza Lado-Ángulo-Lado
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Segundo criterio de semejanza. Lado-Ángulo-Lado (LAL). Dos triángulos como los de la Figura 10.12 son semejantes, si un ángulo de un triángulo es congruente a un ángulo del otro triángulo, y los lados que forman estos ángulos son proporcionales entre sí.

$$\text{Si } \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ y } < C \cong < C' \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

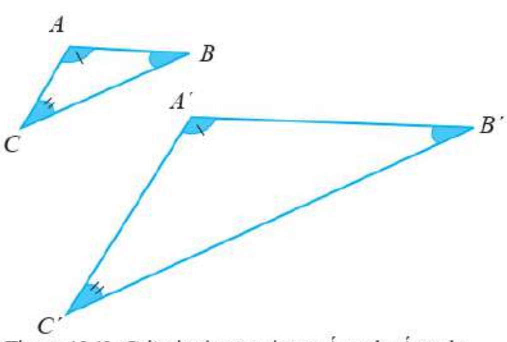


Figura 10.13. Criterio de semejanza Ángulo-Ángulo.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Tercer criterio de semejanza. Ángulo-Ángulo (AA). Dos triángulos como los de la Figura 10.13 son semejantes, si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos correspondientes del otro triángulo.

$$\text{Si } < A \cong < A' \text{ y } < C \cong < C' \text{ entonces } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

La semejanza de triángulos, es útil para calcular distancias y alturas que son difíciles de medir de forma directa, para ello, primero hay que verificar que dos triángulos son semejantes si sus ángulos respectivos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

Ejemplo formativo 10.3

El edificio de tu escuela proyecta una sombra de 9 metros cuando un estudiante de 1.78 metros proyecta una sombra de 1.85 metros. Reflexiona si puedes calcular la altura del edificio de la Figura 10.14.

Figura. 10.14. Cálculo de la altura de un edificio.

Fuente: Fotografía, Asia Cecilia Carrasco Valenzuela.

Resolución:

Longitud de la sombra del edificio: 9 m

Longitud de la sombra del estudiante: 1.85 m

Altura del estudiante: 1.78 m

Altura del edificio: x

Observa que en la Figura 10.14 se forman dos triángulos rectángulos. Luego, por el criterio LAL de semejanza de triángulos, dichos triángulos son semejantes, por lo que

$$\frac{9}{x} = \frac{1.85}{1.78}$$
$$(9)(1.78) = (1.85)(x)$$
$$16.02 = (1.85)(x)$$
$$\frac{16.02}{1.85} = x$$
$$x \approx 8.66$$

Por lo tanto, el edificio tiene una altura aproximada de 8.66 m.

Actividad formativa 10.3

Calcula la altura de un árbol que proyecta una sombra de 8 metros. Se sabe que, en el mismo plano, una barra vertical que mide 2 metros de altura proyecta una sombra de 1.5 metros.

Teorema de Tales

Tales de Mileto (624 a. C.) fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego. Se le atribuyen varios descubrimientos matemáticos, tal como una muy conocida leyenda acerca de un método de comparación de sombras que Tales habría utilizado para medir la altura de las pirámides egipcias.

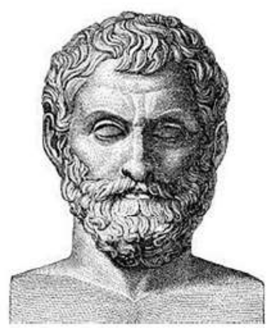


Figura 10.15. Tales de Mileto. *Fuente*: Ilustración de la obra de Ernst Wallis, 1877.

Teorema de Tales. Si en un triángulo se traza una línea paralela a uno de sus lados, esta línea divide a los otros dos lados en segmentos proporcionales.

Actividad formativa 10.4

Demostración del teorema de Tales. A partir del uso del software de geometría dinámica GeoGebra, podemos comprobar el teorema de Tales.

1. Accede al documento desde el QR 10.2 para que realices la actividad paso a paso. Una vez terminada, responde lo siguiente:
   a) ¿Por qué consideras que los triángulos son semejantes?

QR 10.2. Complemento de la actividad formativa 10.4.

Fuente: Parzibyte, 2024.

b) ¿Qué puedes observar?

Triángulo de Napoleón

En una de las múltiples cartas de correspondencia que se conservan del emperador Napoleón Bonaparte, se puede leer lo siguiente: **"El progreso y la perfección de las matemáticas están íntimamente ligadas a la prosperidad del estado"**. Y es que, paralelamente a su fama como general y estratega militar, parece ser que Bonaparte poseía un gran don para las matemáticas y, especialmente, para la geometría. Es esta gran reputación la que explica que exista un teorema matemático bajo su nombre: el Teorema de Napoleón; el cual se puede enunciar de la siguiente manera: "si sobre los lados de un triángulo *ABC*, en el exterior de este, se construyen los triángulos equiláteros *ABZ*, *BCX* y *CAY* entonces los centros de estos triángulos son los vértices de un triángulo equilátero."

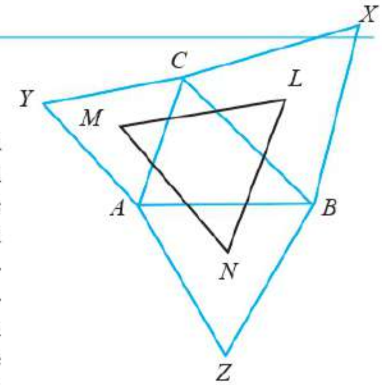


Figura 10.16. Triángulo de Napoleón. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

En geometría, el teorema de Napoleón es un resultado sobre triángulos equiláteros; se le atribuye a Napoleón Bonaparte (1769-1821), si bien no hay pruebas tangibles de que sea el verdadero autor. Aparece publicado en el calendario The Ladies' Diary de 1825, es decir cuatro años después su muerte (Wikipedia, 2024). Otras fuentes señalan que el autor fue Lorenzo Mascheroni, matemático italiano, que conocía de la pasión de Napoleón por la Geometría y le dedica su libro Geometría del Compasso (1797), la confusión hizo que se le atribuyera el teorema y su demostración a Napoleón.

Evaluación formativa 10.1

Construcción del triángulo de Napoleón. Descarga el documento a través del código QR 10.3 para que construyas el triángulo de Napoleón utilizando el software GeoGebra. Una vez realizada la construcción, responde lo siguiente y realiza la demostración para cada caso donde sea posible.

QR 10.3. Complemento de la actividad formativa 10.1.
Fuente: Parzibyte, 2024.

1. ¿Qué características tiene el triángulo de Napoleón?

2. ¿El triángulo original *ABC* y el triángulo *GHI* que se formó son congruentes, semejantes o diferentes? ____________ ¿Por qué? ____
____
____

3. ¿El triángulo de Napoleón *GHI* y los triángulos equiláteros construidos en cada uno de los lados del triángulo *ABC* son congruentes, semejantes o diferentes? ______________________________
¿Por qué? ____
____

4. Ahora, traza un segmento desde el vértice *B* hasta el vértice *D* y un segmento desde el vértice *C* al vértice *E*. ¿Qué se puede decir sobre los triángulos *ABD* y *AEC* que acabas de formar? _________
____ ¿Por qué? ________________________
____

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ________________________________ Plantel: ________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 10. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Distinguí los elementos que caracterizan y diferencian los criterios de congruencia de triángulos. (M1-C2)			
Elaboré argumentos claros, que me permiten diferenciar entre la congruencia y la semejanza de triángulos. (M4-C2)			
Expliqué mis ideas sobre la construcción del triángulo de Napoleón, de manera clara y lógica, asegurando que mis compañeros entiendan mi punto de vista. (M2-C4)			
Organicé los pasos para la construcción del triángulo de Napoleón de manera clara y coherente, facilitando la comprensión del proceso. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

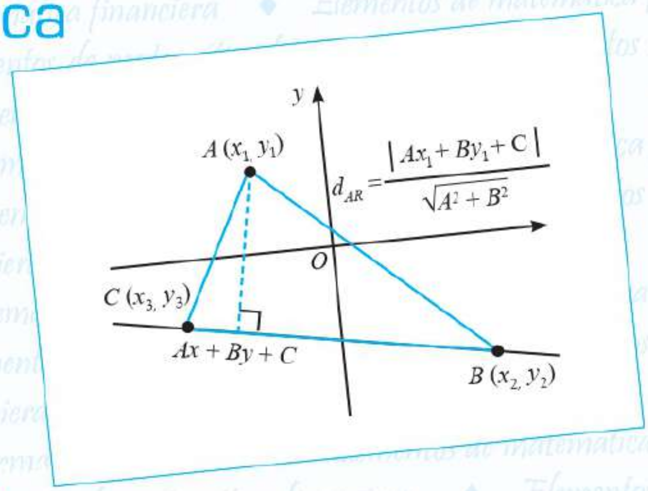
Solicita a un compañero del equipo, que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 10, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Distinguió los elementos que caracterizan y diferencian los criterios de congruencia de triángulos. (M1-C2)			
Elaboró argumentos claros, que me permiten diferenciar entre la congruencia y la semejanza de triángulos. (M4-C2)			
Explicó mis ideas sobre la construcción del triángulo de Napoleón, de manera clara y lógica, asegurando que mis compañeros entiendan mi punto de vista. (M2-C4)			
Organizó los pasos para la construcción del triángulo de Napoleón de manera clara y coherente, facilitando la comprensión del proceso. (M3-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Elementos básicos de geometría analítica



Progresión de aprendizaje 11

Emplea un sistema de coordenadas y algunos elementos básicos de geometría analítica, como la distancia entre dos puntos en el plano, para calcular áreas de figuras geométricas básicas y compara estos resultados con los cálculos obtenidos, empleando principios básicos de geometría sintética.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C1 Analiza los resultados obtenidos al aplicar procedimientos algorítmicos propios del Pensamiento Matemático, en la resolución de problemáticas teóricas y de su contexto.	A			
	C			
	H			
M1-C3 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 11.1

1. a) Marca los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$ en el plano cartesiano de la Figura 11.1.

   b) Une los puntos.

   c) Calcula el área de la figura que se forma.

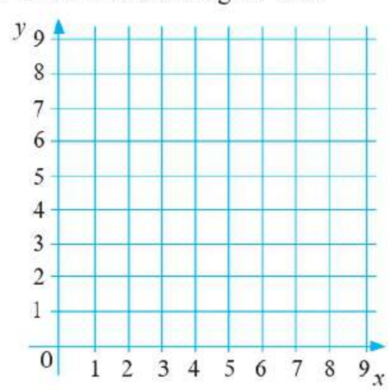


Figura 11.1. Plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

2. a) Marca los puntos A(2, 4), B(6, 6) y C(7, 1) en el plano cartesiano de la Figura 11.2.

   b) Une los puntos.

   c) Calcula el área de la figura que se forma.

3. ¿Qué dificultades enfrentaste para calcular el área de la figura formada en el ejercicio 2?

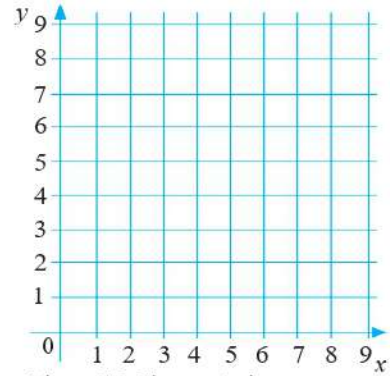


Figura 11.2. Plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Un arquitecto está encargado de diseñar un nuevo parque en tu ciudad. Para esto, necesita crear un plano que incluya figuras geométricas básicas como triángulos, rectángulos y círculos. Este plano arquitectónico, será usado para calcular áreas y distancias entre diferentes puntos clave del parque, asegurando así una correcta distribución de los espacios recreativos y áreas verdes.

Un estudiante de bachillerato ve al arquitecto y a un ingeniero comentando sobre el plano, y les dice que el centro de la fuente, una esquina de la cancha de basquetbol y el punto donde inician los baños forman un triángulo. Luego, les pregunta, ¿cómo le hacen para calcular su área?

El ingeniero, con base a su experiencia, le responde que hay diversos métodos para calcular su área, unos más complejos que otros, usando métodos de la geometría sintética o de la geometría analítica.

Usando métodos tradicionales de la geometría sintética:

1. En el caso de que te sea fácil conocer las dimensiones de la base y de la altura del triángulo, puedes usar la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.
2. Otra opción es medir de forma directa la longitud de sus tres lados (a, b y c), luego, usa la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo: $A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, donde $s = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo.
3. Y una tercera opción es, dibujar el triángulo ABC en el plano arquitectónico y, con un escalímetro, medir la longitud de sus lados y luego, usar la fórmula de Herón.

Usando métodos de la geometría analítica:

1. Coloca el triángulo en un sistema de coordenadas rectangulares y marca sus vértices con los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$. Luego, si con solo observar el triángulo puedes determinar las dimensiones de la base y de la altura, usa la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.
2. Un segundo método es, si después de ubicar los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$ en un sistema de coordenadas rectangulares, no te es posible determinar por observación directa la longitud de la base y de la altura, entonces utiliza la siguiente fórmula del área de Gauss para determinar el área de un triángulo:
$$A = \frac{1}{2}\left|\, x_1\,(y_2 - y_3) + x_2\,(y_3 - y_1) + x_3\,(y_1 - y_2) \,\right|$$
3. Un tercer método es, calcular la distancia entre cada par de vértices mediante la fórmula $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; luego, usa la fórmula $A = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$, donde s es el semiperímetro del triángulo.

4. Un cuarto método, que puedes aplicar después de marcar los vértices del triángulo con los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, es elegir cuál lado consideras como la base, por ejemplo, el segmento $\overline{AB}$, luego, calcula su longitud mediante la fórmula $d_{AB'} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Posteriormente, calcula la altura mediante la fórmula de la distancia de un punto a una recta $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Por último, usa la fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

A lo que responde el joven, que le interesa saber cómo aplican los procedimientos de la geometría analítica para calcular el área de un triángulo, entonces el ingeniero le propone que lo hagan juntos; primero, para un triángulo que tiene como coordenadas de sus vértices los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$ y después, para uno cuyas coordenadas sean los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$.

Ejemplo formativo 11.1

Determina el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$.

Resolución:

Paso 1. Ubica los puntos $A(2, 3)$, $B(5, 7)$ y $C(8, 3)$ en el plano cartesiano de la Figura 11.3 y únelos.

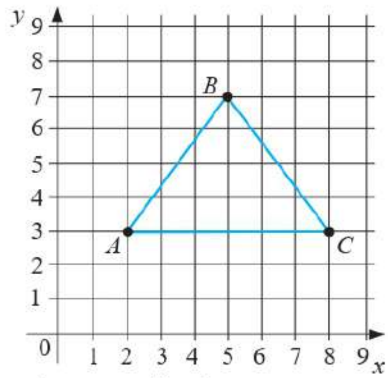


Figura 11.3. Triángulo ABC.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Paso 2. Verifica si por observación directa es posible determinar la longitud de la base y de la altura.

Por observación directa de la Figura 11.4, la longitud de la base $\overline{AC}$ es seis unidades (u) y de su altura $\overline{BD}$ es cuatro unidades. Nota que el punto medio entre A y C es D.

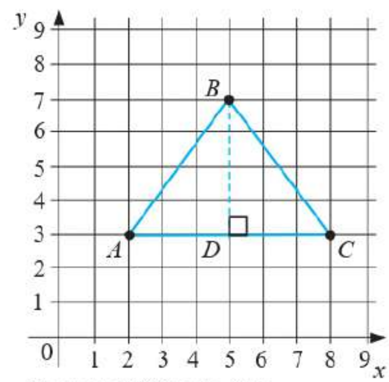


Figura 11.4. Triángulo ABC.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Paso 3. Usa la fórmula, $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es 12 u^2.

Para calcular el área de un triángulo como el que se muestra en la Figura 11.5, en el que por observación directa no es posible determinar la longitud de la base ni de la altura, usa la fórmula:

$$A = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

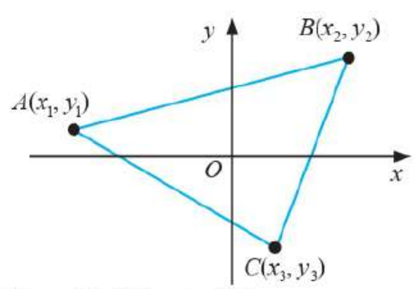


Figura 11.5. Triángulo ABC.

Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 11.2

1. Determina el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$.

Resolución:

Paso 1. Ubica los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$. en el plano cartesiano de la Figura 11.6 y únelos.

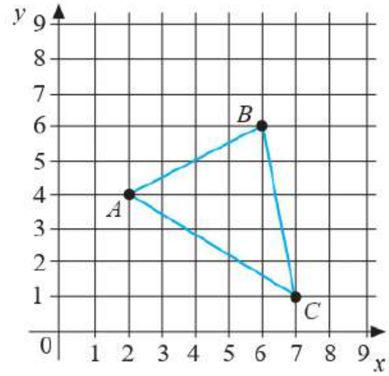


Figura 11.6. Triángulo ABC.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Paso 2. Por observación directa no es posible determinar la longitud de la base y de la altura. En este caso, usa la fórmula:

$A = \frac{1}{2} \left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$,

donde $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_2 = 6$, $x_3 = 7$, $y_3 = 1$.

$A = \frac{1}{2} \left| 2(6 - 1) + 6(1 - 4) + 7(4 - 6) \right|$

$A = \frac{1}{2} \left| 2(5) + 6(-3) + 7(-2) \right|$

$A = \frac{1}{2} \left| 10 - 18 - 14 \right|$

$A = \frac{1}{2} \left| -22 \right|$

$A = \frac{1}{2} \cdot 22$

$A = 11$

De donde, el área del triángulo ABC es 11 u^2

Actividad formativa 11.1

1. Un agricultor posee un terreno con vértices en $A(1, 3)$, $B(3, -2)$, $C(-4, -3)$ y $D(-3, 1)$. Ubica los vértices del terreno en el plano de la Figura 11.7. El agricultor necesita dividirlo en dos triángulos con áreas lo más iguales posible para optimizar el uso del espacio para diferentes cultivos. ¿Cuál es el área de cada triángulo?

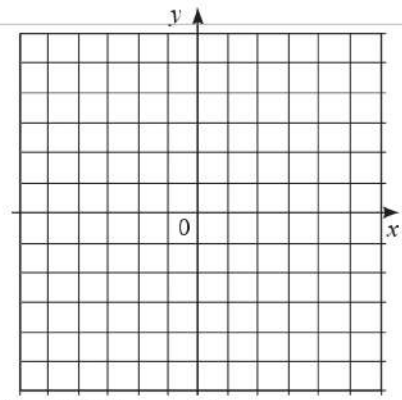


Figura 11.7. Plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

A continuación (ver Figura 11.8), usa la fórmula de la **distancia entre dos puntos**, por ejemplo, la distancia de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ mediante

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

para calcular la longitud de los tres lados del triángulo y así, obtener su área con la fórmula

$$A = \sqrt{s(s - d_{AB})(s - d_{BC})(s - d_{CA})},$$

donde:

$$s = \frac{d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}}{2}$$

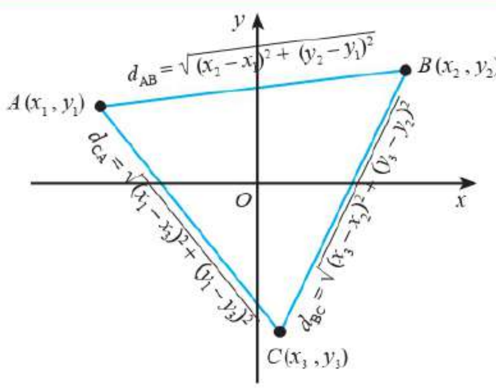


Figura 11.8. Distancia entre dos vértices de un triángulo.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 11.3

Determina el área del triángulo que tiene como vértices los puntos $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$, usando la distancia entre dos puntos para determinar la distancia entre cada par de vértices.

Resolución:

Coordenada de los vértices: $A(2, 4)$, $B(6, 6)$ y $C(7, 1)$.

Distancia del vértice A al vértice B.

$$x_1 = 2, y_1 = 4, x_2 = 6, y_2 = 6$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (6 - 4)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{16 + 4}$$

$$d_{AB} = \sqrt{20}$$

$$d_{AB} = \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$d_{AB} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{AB} \approx 4.472$$

La distancia de A a B es aproximadamente 4.472 u.

Distancia del vértice B al vértice C.

$$x_1 = 6, y_1 = 6, x_2 = 7, y_2 = 1$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(7 - 6)^2 + (1 - 6)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{1^2 + (-5)^2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{1 + 25}$$

$$d_{BC} = \sqrt{26}$$

$$d_{BC} \approx 5.099$$

La distancia de B a C es aproximadamente 5.099 u.

Distancia del vértice C al vértice A.

$$x_1 = 7, y_1 = 1, x_2 = 2, y_2 = 4$$

$$d_{CA} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(2 - 7)^2 + (4 - 1)^2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2}$$

$$d_{CA} = \sqrt{25 + 9}$$

$$d_{CA} = \sqrt{34}$$

$$d_{CA} \approx 5.831$$

La distancia de C a A es aproximadamente 5.831 u.

Para calcular el área, usa la fórmula $A = \sqrt{s\,(s - d_{AB})\,(s - d_{BC})\,(s - d_{CA})}$, donde $s = \frac{d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}}{2}$.

$$s = \frac{d_{AB} + d_{BC} + d_{CA}}{2} = \frac{2\sqrt{5} + \sqrt{26} + \sqrt{34}}{2} \approx 7.701$$

Luego

$$A \approx \sqrt{7.701\,(7.701 - 4.472)\,(7.701 - 5.099)\,(7.701 - 5.831)}$$
$$A \approx 10.9997$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es aproximadamente 11 u^2.

Actividad formativa 11.2

1. Calcula el área de la figura que se forma al unir en el plano de la Figura 11.9 los puntos $A(0, -2)$, $B(2, 0)$, $C(-0.5,\ 2.5)$, $D(2,\ 5)$, $E(-4,\ 2)$, $F(-5,\ -2)$ y $G(-2.5, 0.5)$.

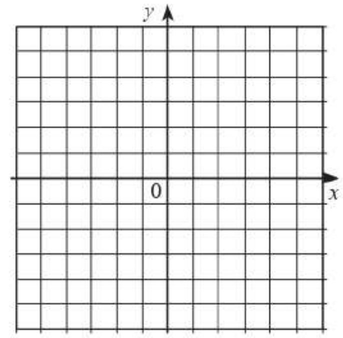


Figura 11.9. Plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

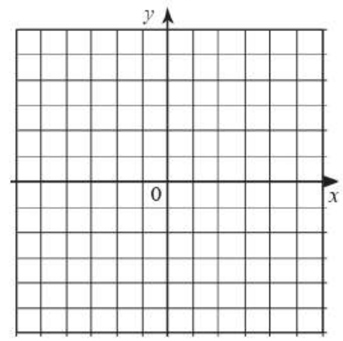


Figura 11.10. Plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

2. Usa la distancia entre dos puntos para determinar la longitud de los lados del triángulo que se forma en la Figura 11.10 por los puntos

$$A(0, 0), B\left(-\tfrac{7}{2}, -\tfrac{11}{2}\right), C(-4.5, 4.5)$$

y, calcula su área.

3. Calcula el área del rectángulo que se muestra en la Figura 11.11.

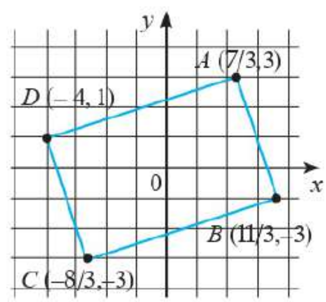


Figura 11.11. Plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Otra forma para calcular el área de un triángulo como el de la Figura 11.12, es usar la fórmula de la distancia entre dos puntos para determinar la longitud de la base $\overline{CB}$, $d_{CB} = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$ y luego, calcular la **distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C = 0$** mediante la fórmula

$$d_{Ar} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{A^2 + B^2}$$

Luego, calcular el área mediante la fórmula

$$A = \frac{d_{CB} \cdot d_{Ar}}{2}$$

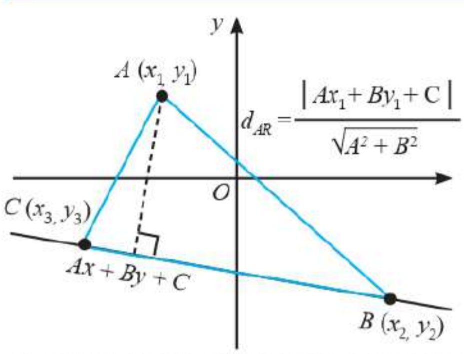


Figura 11.12. Distancia del punto $A(x_1, y_1)$ a la recta $Ax + By + C$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 11.4

Dado el triángulo con vértices $A(-1, -1)$, $B(6, 2)$ y $C(1, 5)$ cómo se muestra en la Figura 11.13:

a) Calcula la distancia del punto A al punto B.

b) Calcula la distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B.

c) Determina el área del triángulo ABC.

Resolución:

a) Calcula la distancia del punto A al punto B.

$$d_{AB} = \sqrt{(6-(-1))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

La distancia del punto A al punto B es $d_{AB} = \sqrt{58}$ u.

b) Calcula la distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B. Necesitas la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-1, -1)$ y $B(6, 2)$, que es de la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde $x_1 = -1$ y $y_1 = -1$. Además, m es la pendiente de la recta y se obtiene mediante

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-(-1)}{6-(-1)} = \frac{3}{7}.$$

Sustituyendo $m = 3/7$, $x_1 = -1$ y $y_1 = -1$ en $y - y_1 = m(x - x_1)$, obtienes:

$$y - (-1) = \frac{3}{7}[x - (-1)]$$

$$y + 1 = \frac{3}{7}(x+1)$$

$$7y + 7 = 3x + 3$$

igualando a cero: $$0 = 3x - 7y - 4$$

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B es: $3x - 7y - 4 = 0$ en su forma general

$$AX + BY + C = 0.$$

Ahora, calcula la distancia $C(1, 5)$ a la recta $3x - 7y - 4 = 0$.

Sustituyendo $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $A = 3$, $B = -7$ y $C = -4$ en $d_{Cr} = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$$d_{Cr} = \frac{|(3)(1) + (-7)(5) + (-4)|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|3 + (-35) - 4|}{\sqrt{9+49}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|3 - 35 - 4|}{\sqrt{58}}$$

$$d_{Cr} = \frac{|-36|}{\sqrt{58}}$$

$$d_{Cr} = \frac{36}{\sqrt{58}}$$

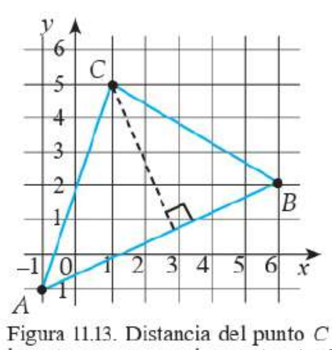


Figura 11.13. Distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

La distancia del punto C a la recta que pasa por los puntos A y B es $d_{Cr} = \frac{36}{\sqrt{58}}$ u.

c) Determina el área del triángulo ABC.

$$A = \frac{d_{AB} \cdot d_{Cr}}{2} = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{36}{\sqrt{58}}}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

Por lo tanto, el área del triángulo ABC es 18 u^2.

Actividad formativa 11.3

1. Dado el triángulo con vértices $A(-1, 5)$, $B(-7, 3)$ y $C(5, 1)$.
   a) Calcula la distancia del punto B al punto C.

   b) Calcula la distancia del punto A a la recta que pasa por los puntos B y C.

   c) Determina el área del triángulo ABC.

2. Calcula el área del paralelogramo $PQRS$ con vértices $P(-2, -1)$, $Q(2, 1)$, $R(3, 4)$ y $S(-1, 2)$.

3. Calcula el área del trapecio $MNOP$ con vértices $M(-5, 5)$, $N(3, 7)$, $O(8, 3)$ y $P(-8, -1)$.

Evaluación formativa 11.1

1. Calcula el área del paralelogramo $ABCD$ cuyos vértices son $A(1, 1)$, $B(4, 2)$, $C(5, 5)$ y $D(2, 4)$.

2. Calcula el área del paralelogramo $MNOP$ cuyos vértices son $M(-13, 11)$, $N(-1, 3)$, $O(-9, 1)$ y $P(-15, 5)$.

3. Reto matemático.
   a) A partir del segmento $\overline{AB}$ con extremos $A(-4, 1)$ y $B(4, -3)$, determina las coordenadas del vértice C del triángulo equilátero ABC.

   b) Calcula el área del triángulo ABC.

   c) Determina las coordenadas del punto medio de cada lado del triángulo ABC.

   d) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos medios del triángulo ABC.

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ____________________________________ Plantel: _________________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 11. Responde con honestidad, a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Analicé críticamente la aplicación de la distancia entre dos puntos en el cálculo de áreas. (M2-C1)			
Elegí el modelo matemático adecuado para calcular el área de figuras geométricas. (M1-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

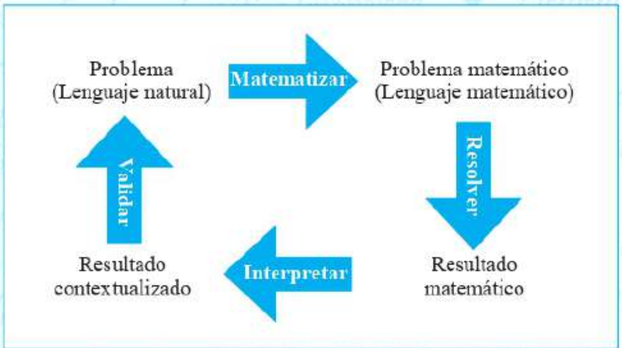
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 11 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Analizó críticamente el uso de la distancia entre dos puntos en el cálculo de áreas. (M2-C1).			
Eligió el modelo matemático adecuado para calcular el área de figuras geométricas (M1-C3).			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Resolución de problemas aplicando funciones lineales, cuadráticas y polinomiales



Progresión de aprendizaje 12

Modela situaciones y resuelve problemas significativos para el estudiantado, tanto de manera algebraica como geométrica, al aplicar propiedades básicas de funciones lineales, cuadráticas y polinomiales.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M2-C3 Construye un modelo matemático, identificando las variables de interés, con la finalidad de explicar una situación o fenómeno y/o resolver un problema tanto teórico como de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 12.1

Lee cada pregunta y selecciona la respuesta correcta.

1. ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación $5 - (2 + 3)$?
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
2. ¿Cuál es el resultado de simplificar: $2x + 3x - 5x + 4x^2 - 2x^2 + x$?
   a) $2x^2 + 2x$ b) $2x^2 + 4x$ c) $2x^2 + 6x$ d) $2x^2 + x$
3. ¿Cuál es el resultado de factorizar la siguiente expresión $x^2 + 5x + 6$?
   a) $(x + 2)(x - 3)$ b) $(x + 1)(x + 6)$ c) $(x + 3)(x + 2)$ d) $(x + 4)(x + 1)$
4. ¿Cuál es la solución de la siguiente ecuación $2x - 9 = 11 - 3x$?
   a) $x = 1$ b) $x = 2$ c) $x = 3$ d) $x = 4$
5. ¿En qué cuadrante del plano cartesiano se encuentra el punto $(-2, -3)$?
   a) Primero b) Segundo c) Tercero d) Cuarto
6. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1, 2)$ y $(3, 4)$?
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

Planificación del presupuesto para combustible

***Problema* (lenguaje natural).** Carlos es un repartidor, que necesita planificar su presupuesto semanal para combustible. Sabe que su vehículo consume en promedio, ocho litros de gasolina por cada 100 kilómetros recorridos. Cada semana, Carlos recorre una distancia total variable, dependiendo de la cantidad de entregas que tenga. Esta semana estima que recorrerá d kilómetros y quiere calcular cuántos litros de gasolina necesitará y el costo asociado, sabiendo que el precio del litro de gasolina es de $22.00.

Matematizar. Para resolver este problema, Carlos decide modelarlo matemáticamente. Sabe que necesita calcular la cantidad de gasolina G necesaria, en función de la distancia d recorrida. Utilizando la relación de consumo de combustible (ocho litros por cada 100 kilómetros), la función matemática que representa este problema es:

$$G(d) = 0.08d$$

Resolver. Ahora, Carlos puede usar esta función para calcular los litros de gasolina necesarios. Supongamos que esta semana estima que recorrerá 250 kilómetros. Sustituyendo este valor en la función:

$$G(250) = 0.08(250)$$
$$G(250) = 20$$

Para calcular el costo total de la gasolina, Carlos multiplica la cantidad de litros necesarios por el precio de un litro:

$$Costo = G(250) \times 22$$
$$Costo = 20 \times 22$$
$$Costo = 440$$

Interpretar. El resultado matemático, indica que Carlos necesita 20 litros de gasolina y que esto le costará $440.00 para recorrer los 250 kilómetros estimados esta semana.

Validar. Carlos valida el resultado, comparando su estimación con sus experiencias anteriores. Si encuentra que su consumo de gasolina y el costo, corresponden a lo que ha calculado, puede planificar su presupuesto con mayor confianza, asegurando que tiene suficientes fondos para cubrir sus necesidades de combustible durante la semana.

Resumen del método alternativo al método de cuatro pasos de Pólya

- ***Problema.*** Carlos necesita planificar su presupuesto para combustible, basado en la distancia que recorrerá.
- ***Matematizar.*** Modela el problema con una función matemática que relaciona la distancia recorrida con la cantidad de gasolina necesaria.
- ***Resolver.*** Utiliza la función para calcular los litros de gasolina necesarios y el costo asociado.
- ***Interpretar.*** Traduce el resultado matemático a un contexto real, ajustando su presupuesto semanal para cubrir los costos de combustible.
- ***Validar.*** Verifica que su estimación de combustible y costos corresponden a su experiencia, asegurando la precisión de su planificación.

Mediante el proceso descrito en la Figura 12.1, Carlos puede gestionar mejor sus recursos financieros y optimizar su planificación semanal de combustible, aplicando conceptos matemáticos a problemas prácticos de su trabajo diario.

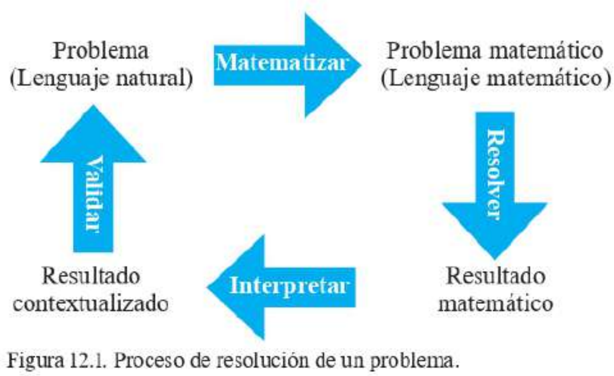


Figura 12.1. Proceso de resolución de un problema.
Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

Funciones matemáticas

Imagina que quieres saber, cuál es el volumen de una naranja que vas a comer. Es difícil calcularlo exactamente, pero puedes usar un modelo para obtener una aproximación. Un modelo es una representación simplificada de la realidad que te ayuda a comprenderla mejor.

Hay diferentes tipos de modelos, como mapas, dibujos, maquetas, e incluso personas que posan para artistas. En matemáticas, los modelos constituyen la base para estudiar y entender problemas propios de las áreas del conocimiento como: economía, ingeniería, medicina, química, física, psicología, etc.

Un **modelo matemático,** es la representación simplificada de la realidad. En particular, mediante el uso de funciones que describen su comportamiento, o de ecuaciones que representan sus relaciones. Un modelo, se obtiene durante el proceso de solución de un problema real, como se ve en la Figura 12.1.

Para construir un modelo matemático, debes seguir estos pasos:

1) **Observar la realidad:** observa una naranja y decide qué características son importantes para calcular su volumen.
2) **Describir el modelo:** explica con palabras, cómo vas a calcular el volumen.
3) **Escribir el modelo matemático:** en el caso de la naranja, la figura que más se asemeja a ella es la de una esfera, por lo que utilizaremos la fórmula para calcular el volumen de una esfera.
4) **Obtener resultados:** usa la fórmula para calcular el volumen de la naranja.

Retomando el ejemplo de la naranja, puedes usar una esfera como modelo. La fórmula para calcular el volumen de una esfera es igual a $\frac{3}{4}\pi r^3$, donde $\boldsymbol{r}$ es el radio de la esfera. Si mides el radio de la naranja y lo sustituyes en la fórmula, puedes obtener su volumen.

Como ya aprendiste desde las primeras progresiones, la matemática tiene su propio lenguaje que permite describir y comprender el mundo que nos rodea. Así, las relaciones matemáticas y las funciones, son herramientas para modelar la realidad.

Una **relación,** es una regla (criterio) de correspondencia entre cada elemento del conjunto inicial o de partida (dominio), con al menos un elemento del conjunto de llegada (rango).

A diferencia de una relación, una función f es una regla que produce una correspondencia entre dos conjuntos, de modo que cada valor del primer conjunto le hace corresponder **un único valor** del segundo. Por ejemplo, la Figura 12.2 muestra la relación entre el tiempo y la temperatura ambiente.

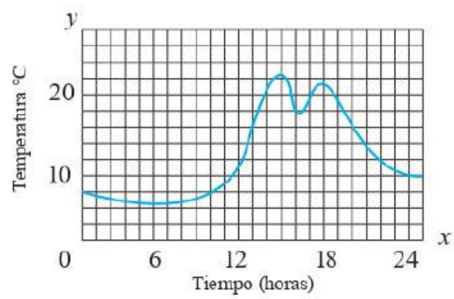


Figura 12.2. La temperatura ambiente en cierto lugar en cada instante del día.
Fuente: Elaboración propia, (GeoGebra, 2024).

También, una función puede verse como una máquina que transforma "materia prima" (por ejemplo, números), que le vamos dando, y produce un "producto final" (otro número), ver Figura 12.3. Cada vez que introducimos un valor de entrada (materia prima), la máquina nos devuelve un valor de salida (producto final). La notación $\boldsymbol{y = f(x)}$ define una función llamada f. Esto se lee como **"y es una función de x".** La letra x representa el valor de entrada, o variable independiente. La letra **y, o $f(x)$,** representa el valor de salida, o variable dependiente.

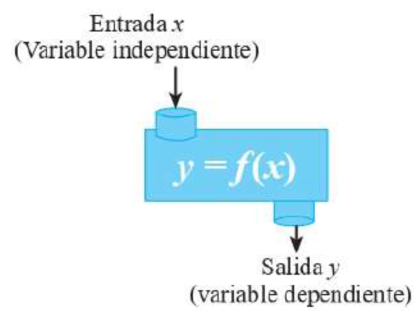


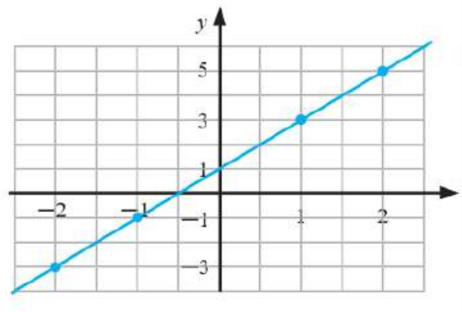
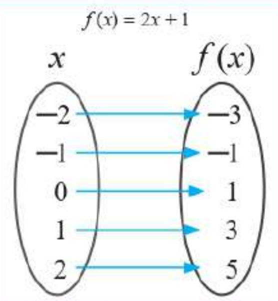
Figura 12.3. La función como una máquina de entrada y salida.
Fuente: Elaboración propia, (Word, 2024).

A continuación, damos tres definiciones del concepto función.

- ***Definición 1.*** Dados dos conjuntos A y B, una función de A en B, es una correspondencia en la que a cada elemento del conjunto A, se la asocia un único elemento del conjunto B.
- ***Definición 2.*** Una función, es un conjunto de pares ordenados de números (x, y), en el que no existen dos o más pares ordenados con el mismo valor de x y diferentes valores de y.
- ***Definición 3.*** Una función $\boldsymbol{f: x \rightarrow y}$, es un conjunto de pares ordenados (x, y), con $x \in \boldsymbol{X}$ y $y \in \boldsymbol{Y}$, tal que todo valor de $x \in \boldsymbol{X}$ aparece como primera componente de un solo par ordenado, es decir, si (x, y_1) y (x, y_2) y pertenecen a la función $\boldsymbol{f}$, entonces $\boldsymbol{y_1 = y_2}$.

Para conocer el valor "$f(x)$" de una función f en un valor específico de x, es necesario asignarle un número real a x para evaluarla. Al conjunto de estos valores de la variable independiente x se le conoce como **dominio** de la función (D_f), y a cada número real x, en el que se puede evaluar f, está relacionado con un único valor $f(x)$, que se llama imagen de x. Al conjunto de estas imágenes de la variable independiente se le conoce como **rango (R_f), recorrido** o **conjunto imagen** de la función.

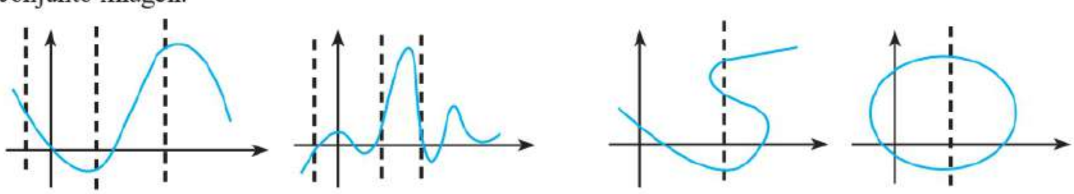
Existen diferentes formas de representar una función como se muestra en la Tabla 12.1, ello depende del contexto y del objetivo que se tenga. Estas son:

Lenguaje natural	Expresión algebraica	Gráfica
El doble de un número aumentado en uno	$f(x) = 2x + 1$	
Tabla – Pares ordenados	**Diagrama sagital**	
(ver tabla siguiente)		

$f(x) = 2x + 1$		
x	$f(x)$	(x, y)
−2	−3	(−2, −3)
−1	−1	(−1, −1)
0	1	(0, 1)
1	3	(1, 3)
2	5	(2, 5)

Tabla 12.1. Diferentes representaciones de una función matemática.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Para determinar si una gráfica representa a una función, se utiliza la **prueba de la recta vertical** como se muestra en la Figura 12.4: si una recta vertical corta a la gráfica en más de un punto no es una función, ya que, a un mismo valor de la variable independiente en el dominio, correspondería más de un valor en el conjunto imagen.



Representan a una función

No representan a una función

Figura 12.4. Gráficas que representan o no a una función. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Gráficamente, las funciones se analizan de izquierda a derecha. Respecto a la monotonía de la función, esta es creciente donde $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$. Y decreciente donde $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$.

Por ejemplo, en la Figura 12.5, la función f decrece en el intervalo (x_0, x_1), crece en (x_1, x_2) y decrece en (x_2, x_3).

En el punto donde la función alcanza el valor mayor, se dice que hay un **máximo**, y en el punto donde alcanza el valor menor se dice que hay un **mínimo**.

En el ejemplo del gráfico de la Figura 12.6, la función f tiene un valor mínimo $f(x_1)$ en x_1 y un valor máximo $f(x_2)$ en x_2.

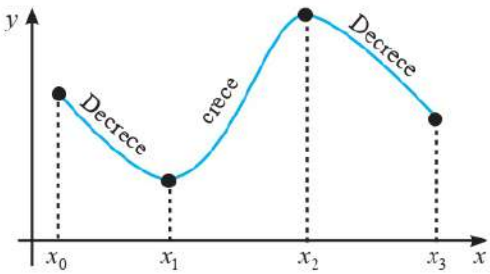


Figura 12.5. Monotonía de una función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

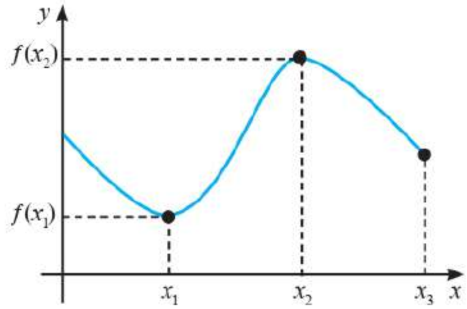


Figura 12.6. Monotonía de una función.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Actividad formativa 12.1

1. De acuerdo con la representación de los diagramas de la Figura 12.7, determina si representan una función o no. En los casos afirmativos, fundamenta y escribe la ecuación que representa a la función.

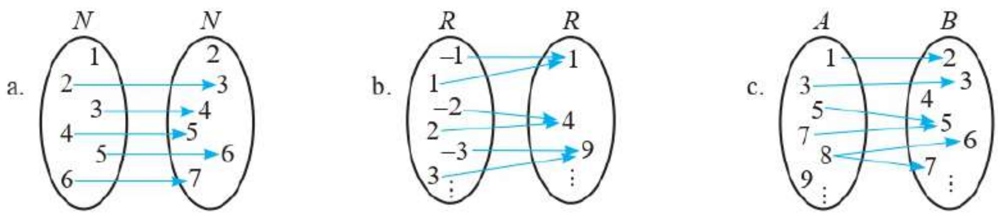


Figura 12.7. Relaciones. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

2. Determina cuáles de las siguientes gráficas de la Figura 12.8 representan funciones y cuáles no. Fundamenta tu respuesta.

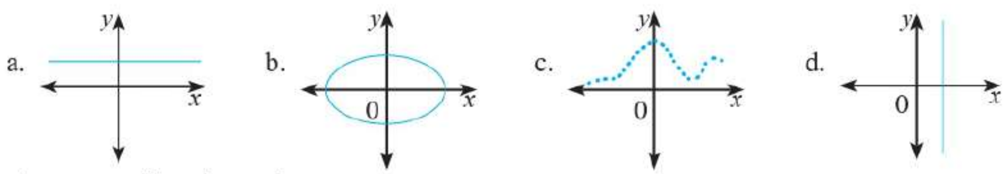


Figura 12.8. Gráficas de ecuaciones.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

3. Dada la correspondencia que a cada número del conjunto A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16} le hace corresponder su mitad:

   a) Representa la regla de correspondencia mediante una tabla.

   b) Represéntala gráficamente.

c) Escribe la ecuación que represente esta correspondencia y fundamenta por qué es una función. Represéntala con f.

d) Calcula los valores de $f(2)$, $f(6)$ y $f(10)$.

e) ¿Para qué valores x del dominio se cumple que $f(x) = 2$, $f(x) = 6$?

Función lineal

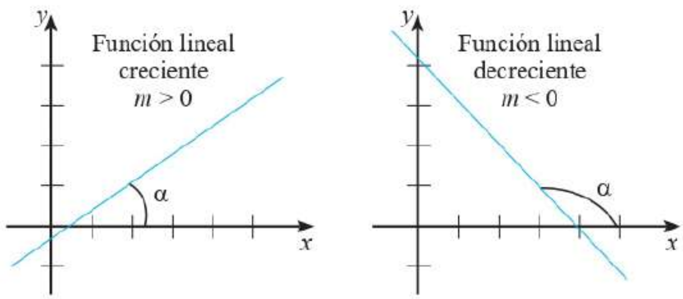


Figura 12.9. Pendiente de una función lineal.
Fuente: Elaboración propia (Desmos, 2024).

Las **funciones lineales** se caracterizan por su representación gráfica, que es una línea recta en el plano cartesiano. Su expresión algebraica es de la forma $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$, donde $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{b}$ son números reales y $m \neq 0$. Se dice que es una función lineal, debido al exponente del término lineal mx.

La **variable independiente** es x, mientras que la **variable dependiente** es $\boldsymbol{f(x)}$. La pendiente de la recta es m, y determina su inclinación; mientras que, el intercepto en el eje y es $\boldsymbol{b}$, y determina el punto donde la línea cruza el eje y. El **dominio** de esta función es la recta real, $\boldsymbol{D_f}$: $(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función lineal está definida para todo $x \in R$. Por su parte, el **rango** de la funcion es la recta real, R_f : $(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que cada $x \in D_f$ tiene una imagen en el eje y. Una función lineal es **creciente** si la pendiente es positiva y **decreciente**, si la pendiente es negativa, como se muestra en la Figura 12.9. Además, es una función creciente o decreciente en todo su dominio.

Ejemplo formativo 12.1

Situación: optimización de la producción de empanadas mediante funciones lineales

Problema. Doña Julia, dueña de una próspera fábrica de empanadas, se enfrenta a un dilema: la demanda de sus deliciosas empanadas aumenta sin parar, pero su proceso de producción aún es manual, lo que limita la cantidad que puede producir. Para optimizar su negocio y satisfacer la demanda de sus clientes, decide utilizar funciones lineales para modelar y resolver este problema.

Empanadas	Tiempo
200	4
400	7
600	10

Doña Julia comienza por recopilar datos sobre la producción actual. Registra el tiempo (en horas) que tarda su equipo en producir diferentes cantidades de empanadas.

Matematizar. Para determinar la relación entre las variables, doña Julia grafica los valores de ambas variables en el cartesiano (ver Figura 12.10), observando que los datos forman una línea recta (relación lineal) entre el **tiempo (y) y la cantidad de empanadas (x)**, cuyo modelo es $y = mx + b$.

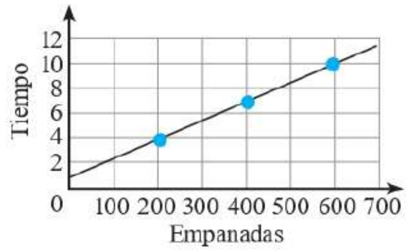


Figura 12.10. Función lineal.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Resolver. Para determinar la ecuación que modelará su función $y = mx + b$, doña Julia, primero utiliza las coordenadas de dos de sus puntos, (200, 4) y (400, 7), para calcular el valor de la pendiente $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, donde $x_2 - x_1 \neq 0$. Luego, sustituye los valores para obtener, $m = \frac{7-4}{400-200} = \frac{3}{200} = 0.015$.

La ordenada en el origen $\boldsymbol{b}$, que es el punto donde la línea cruza el eje y, la determina la forma general en que se expresa una función lineal $\boldsymbol{f(x)}$ o $\boldsymbol{y = mx + b}$, reemplazando los datos.

$$y = mx + b$$
$$4 = 0.015(200) + b$$
$$4 = 3 + b$$
$$b = 4 - 3$$
$$b = 1$$

Interpretación

$\boldsymbol{m = 0.015}$	Es la pendiente de la función. Representa el tiempo adicional que doña Julia tarda en preparar cada empanada después de la hora que le toma preparar los ingredientes. En este caso, son 0.015 horas o 0.9 minutos, por empanada.
$\boldsymbol{b = 1}$	Es el tiempo que doña Julia tarda en preparar los ingredientes, independientemente del número de empanadas que fabrique.

Así, la ecuación de la función lineal que modela la producción de empanadas de doña Julia es, $y = 0.015x + 1$.

Validación

Comprobamos la solución con los datos iniciales.

Para producir 200 empanadas requiere: $y = 0.015(200) + 1 = 3 + 1 = 4$ horas.

Para producir 400 empanadas requiere: $y = 0.015(400) + 1 = 6 + 1 = 7$ horas.

Para producir 600 empanadas requiere: $y = 0.015(600) + 1 = 9 + 1 = 10$ horas.

Por lo tanto, doña Julia puede usar la función $y = 0.015x + 1$ para planificar su producción diaria de empanadas. Este modelo, le permite predecir cuántas empanadas producirá en función de las horas trabajadas, y optimizar su proceso de producción para satisfacer la demanda creciente.

Actividad formativa 12.2

1. Una empresa de telefonía móvil, cobra una tarifa mensual fija de \$50.00, más \$1.00 por cada mensaje de texto enviado. Un cliente desea saber cuánto pagará, si envía un cierto número de mensajes en un mes.

2. Pedro, tiene una carpintería y necesita aumentar la producción de muebles para cumplir con los pedidos. Usa la función lineal para modelar la situación, y así tener un modelo que le permita determinar la producción de muebles.

   Datos:

   a) En 2 horas produce 80 muebles.

   b) En 5 horas produce 200 muebles.

3. En un cierto tipo de taxi, el taxímetro marca un costo de \$30.00 por el primer kilómetro recorrido y \$20.00 por cada kilómetro adicional. Determina el costo en pesos, de un viaje en función de los kilómetros recorridos. También por medio de su función, tabla y gráfica, calcula el costo de un viaje de 15 km apoyándote de Excel.

Función cuadrática

Las **funciones cuadráticas** son funciones polinómicas que se caracterizan por tener la forma general $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son constantes, y $a \neq 0$. Estas funciones toman su nombre del término cuadrático ax^2 presente en su expresión, el cual es el responsable de generar la curvatura (parábola) en la gráfica de la misma.

Esta función se caracteriza por ser un **polinomio de segundo grado**, que tiene como **función base** a $f(x) = x^2$; y es conocida como la **función cuadrática básica**. Su gráfica se muestra en la Figura 12.11.

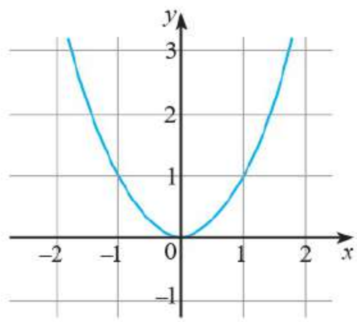


Figura 12.11. Gráfica de $f(x) = x^2$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

El **dominio** de esta función es la recta real, $D_f:(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función cuadrática básica está definida para todo $x \in \Re$. Por su parte, el **rango** de la función es $y \geq 0$, $\Re_f$: $[0, +\infty)$; esto quiere decir que cada $x \in D_f$ tiene una imagen en la parte no negativa del eje y. Esta función se caracteriza por ser **continua en todo su dominio**, esto quiere decir que para hacer su gráfica solo se requiere de un trazo.

Por su parte, la función $f(x) = -x^2$ es una reflexión de $f(x) = x^2$ sobre el eje x, como se ve en la Figura 12.12.

La **monotonía** de la función $f(x) = ax^2$ puede ser **creciente** y **decreciente** o **decreciente** y **creciente** en todo su dominio, esto depende del coeficiente del término cuadrático a, si $a > 0$, pasa de ser decreciente a ser creciente; si $a < 0$, pasa de ser creciente a ser decreciente, como se visualiza en la Figura 12.13.

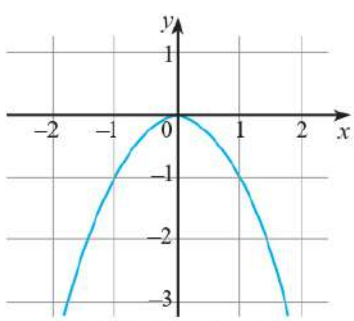


Figura 12.12. Gráfica de $f(x) = -x^2$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

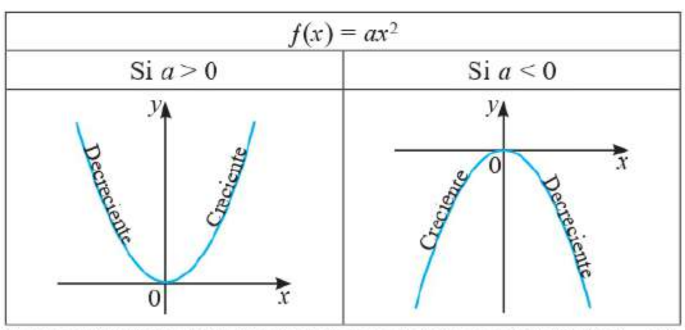


Figura 12.13. Efecto del parámetro a en la monotonía de la función $f(x) = ax^2$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, lo que indica que es **cóncava hacia arriba**; en consecuencia, la función tiene un valor mínimo $f(0) = 0$ en $x = 0$. Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, lo que indica que es **cóncava hacia abajo**; en consecuencia, la función tiene un valor máximo $f(0) = 0$ en $x = 0$. Como se visualiza en la Figura 12.14.

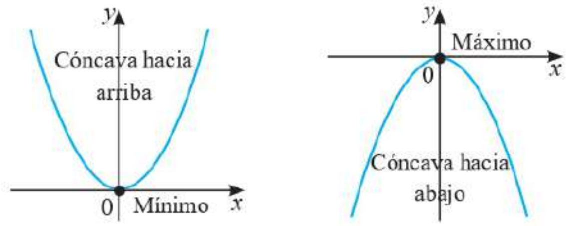


Figura 12.14. Efecto del parámetro a en la concavidad de la función $f(x) = ax^2$. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 12.2

Comportamiento de la población de bacterias en el laboratorio de biología de la preparatoria El Rosario.

1. En el laboratorio de biología de la preparatoria "Comte. Víctor Manuel Tirado López" de El Rosario, se cultivaron 500 bacterias que comenzaron a reproducirse. Después de cierto tiempo, el número de bacterias comenzó a disminuir, se supone que la cantidad de bacterias al cabo de t minutos, está dada por la función $f(t) = -t^2 + 40t + 500$.

   a) ¿En cuánto tiempo se alcanzó la población máxima?

   b) ¿Cuál es la cantidad máxima de bacterias?

   c) ¿En cuánto tiempo se extingue la población de bacterias?

Resolución:

Para resolver este problema, es necesario explorar la tabla de valores y la gráfica, o bien, por métodos analíticos.

Explorando la tabla de valores y la representación gráfica

La función cuadrática es $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde los coeficientes a, b y c tienen asignado los valores $a = -1$, $b = 40$ y $c = 500$, estos se obtienen de la función propuesta.

La variable dependiente es $f(t)$: cantidad de bacterias.

La variable independiente es t: tiempo en minutos.

t	at^2	bt	c	$f(t)$
0	0	0	500	500
5	–25	200	500	675
10	–100	400	500	800
15	–225	600	500	875
20	–400	800	500	900
25	–625	1000	500	875
30	–900	1200	500	800
35	–1225	1400	500	675
40	–1600	1600	500	500
45	–2025	1800	500	275
50	–2500	2000	500	0

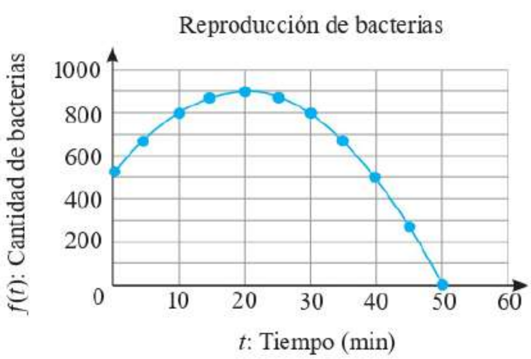


Figura 12.15. Función cuadrática.
Fuente: Elaboración propia (Excel, 2024).

Al inicio ($t = 0$) hay una población de 500 bacterias.

a) A los 20 minutos se tiene la población máxima.
b) La población máxima que se alcanza es de 900 bacterias.
c) Por último, a los 50 minutos se extingue la población.

Ahora resolvámoslo por métodos analíticos

a) ¿En cuánto tiempo se alcanzó la población máxima?

Para calcular el a), nos damos cuenta de que ese punto es lo que conocemos como vértice, que es el punto más alto de la parábola, entonces las coordenadas del vértice son $V(x_V, y_V)$.

Cálculo de x_V, con la siguiente fórmula, $x_V = -\frac{b}{2a}$.

$$x_V = -\frac{40}{2(-1)}$$

$$x_V = -\frac{40}{-2}$$

$$x_V = 20$$

Hemos determinado el tiempo en el que alcanzó su máxima población, que es 20 minutos.

b) ¿Cuál fue la máxima cantidad de bacterias?

Ahora, la cantidad máxima de bacterias la determinamos, evaluando la función

$$f(t) = -t^2 + 40t + 500, \text{ en } t = 20.$$

$$f(t) = -t^2 + 40t + 500$$

$$f(20) = -(20)^2 + 40(20) + 500$$

$$f(20) = -400 + 800 + 500$$

$$f(20) = 900$$

A los 20 minutos se alcanza una cantidad máxima de 900 bacterias.

c) ¿En cuánto tiempo se extingue la población de bacterias?

Para determinar en cuanto tiempo se extingue la población de bacterias, calculemos los valores de t para los cuales $f(t) = 0$. Es decir, debemos resolver la ecuación $-t^2 + 40t + 500 = 0$, para ello usemos la fórmula general

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ con } a = -1,\ b = 40 \text{ y } c = 500.$$

$$t = \frac{-(40) \pm \sqrt{(40)^2 - 4(-1)(500)}}{2(-1)}$$

$$t = \frac{-40 \pm \sqrt{1600 + 2000}}{-2}$$

$$t = \frac{-40 \pm \sqrt{3600}}{-2}$$

$$t = \frac{-40 \pm 60}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-40 + 60}{-2} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{-40 - 60}{-2}$$

$$t_1 = \frac{20}{-2} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{-100}{-2}$$

$$t_1 = -10 \quad \text{y} \quad t_2 = 50$$

Como ya sabemos, de acuerdo con el contexto del problema, el tiempo no es negativo, por lo que se descarta la solución $t_1 = -10$. Por lo tanto, a los 50 minutos la población de bacterias es igual a cero (se extingue).

Actividad formativa 12.3

1. Un objeto se lanza hacia arriba desde el piso. La altura del objeto por encima del suelo (en pies), en el instante t en segundos, se ilustra en la Figura 12.16.

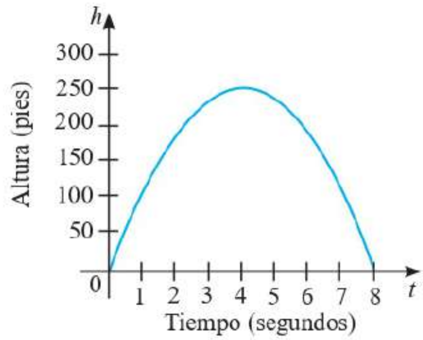


Figura 12.16. Función cuadrática.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

   a) ¿Desde qué altura fue lanzado el objeto? ________
   ¿En qué instante de tiempo? ________________

   b) ¿Cuánto tiempo tarda el objeto en chocar con el piso? ______________________________

   ¿Cuál es su altura en ese instante de tiempo? _____
   ____

   c) Determina el intervalo donde la altura del objeto va aumentando. ______________________
   ____

   d) Determina el intervalo donde la altura del objeto va disminuyendo. __________________
   ____

   e) Determina la altura máxima que alcanza el objeto. ______________________________

   f) Determina la concavidad de la gráfica. Justifica tu respuesta. _____________________
   ____
   ____

   g) Determina la función que representa a la gráfica. ______________________________
   ____

2. Un arco parabólico, abarca 120 pies y tiene una altura máxima de 25 pies. Elije ejes coordenados rectangulares adecuados y determina la ecuación de la parábola. Luego, calcula la altura del arco en las abscisas que están a 10, 20 y 40 pies del centro del arco.

3. Una máquina lanzadora de pelotas, lanza una pelota con una inclinación de 45° respecto de la horizontal. Los siguientes datos representan la altura h, de la pelota, en el instante en que ha recorrido x pies horizontales.

   a) Usa la aplicación *Desmos®* o *Excel®* para obtener la función cuadrática que mejor se ajuste a los datos.

   b) Determina el dominio y rango de la función de acuerdo con el contexto de los datos.

Distancia x	Altura h
20	25
40	40
60	55
80	65
100	71
120	77
140	77
160	75
180	71
200	64

Función cúbica

Una función polinómica, es una función cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, una función polinómica está definida por la suma o resta de un número finito de términos de diferente grado, por lo tanto, una función polinómica se describe matemáticamente con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$$

Una función cúbica tiene la **forma** $\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$, donde a, b, c y d son números reales, con $\boldsymbol{a \neq 0}$.

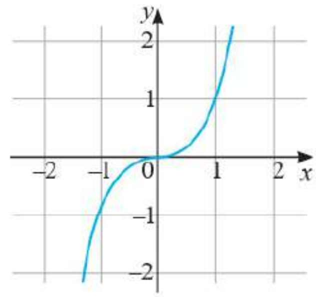


Figura 12.17 Gráfica de $f(x) = x^3$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Esta función se caracteriza por ser un **polinomio de tercer grado**, que tiene como **función base** a $f(x) = x^3$ y es conocida como la **función cúbica básica**. Su gráfica se muestra en la Figura 12.17. El **dominio** de esta función es la recta real, D_f:$(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que la función cúbica básica está definida para todo $x \in \Re$. Por su parte, el **rango** de la función es la recta real, $\Re_f$:$(-\infty, +\infty)$; esto quiere decir que cada $x \in D_f$ tiene una imagen en el eje y. Esta funcion se caracteriza por ser **continua en todo su dominio**; esto quiere decir que para hacer su gráfica solo se requiere de un trazo.

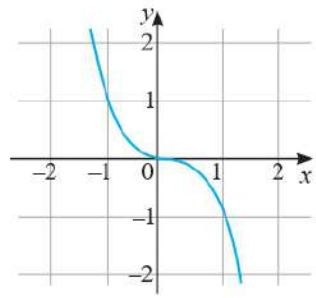


Figura 12.18 Gráfica de $f(x) = -x^3$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Por su parte, la función $\boldsymbol{f(x)} = -x^3$ es una reflexión de $\boldsymbol{f(x)} = x^3$ sobre el eje x, como se ve en la Figura 12.18.

La **monotonía** de la función $\boldsymbol{f(x)} = ax^3$ puede ser **creciente** o **decreciente** en todo su dominio, esto depende del coeficiente del término cúbico a, si $a > 0$, es creciente, si $a < 0$, esta será decreciente, como se visualiza en la Figura 12.19.

La función $\boldsymbol{f(x)} = ax^3$, en su gráfica presenta concavidades como se muestra en la Figura 12.20, una hacia abajo y otra hacia arriba o viceversa según el signo del coeficiente a. Este cambio se da en el punto, donde la concavidad cambia, y se le llama **punto de inflexión**.

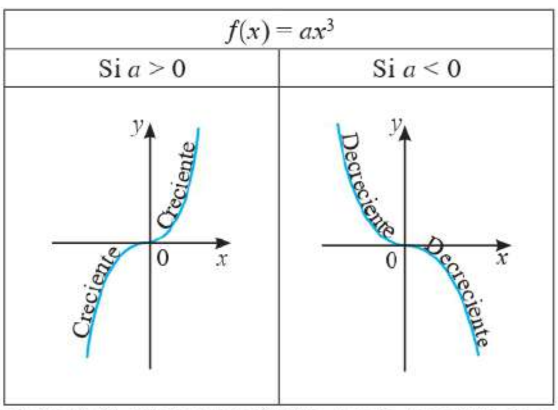


Figura 12.19. Efecto del parámetro a en la monotonía de la función $f(x) = ax^3$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

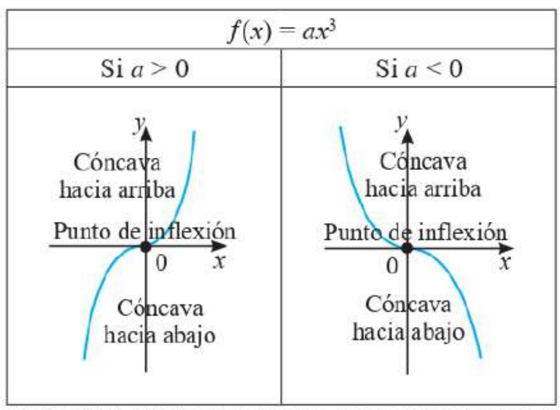


Figura 12.20. Efecto del parámetro a en la concavidad de la función $f(x) = ax^3$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 12.3

Situación: economía – análisis de costos

En economía, la función cúbica se puede utilizar para modelar costos en función de la producción. Dada la función de costo $C(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 1000$, determina los niveles de producción x en los que el costo es 1000 dólares.

Resolución:

Para encontrar los niveles de producción donde el costo es 1000 dólares, igualamos la función a 1000 y resolvemos:

$$x^3 - 5x^2 + 8x + 1000 = 1000$$

Simplificamos la ecuación:

$$x^3 - 5x^2 + 8x = 0$$

Factorizamos la ecuación:

$$x(x^2 - 5x + 8) = 0$$

$$x = 0 \text{ y } x^2 - 5x + 8 = 0$$

Luego, resolvemos la ecuación cuadrática $x^2 - 5x + 8 = 0$, la cual no tiene soluciones reales ya que el discriminante es negativo.

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(8) = 25 - 32 = -7$$

Por lo que la única solución real es, $x = 0$.

Por lo tanto, en $x = 0$ el costo inicial es 1000 dólares, es decir, iniciar la producción tiene un costo de 1000 dólares.

Actividad formativa 12.4

1. Juan está diseñando un contenedor cúbico, cuyo volumen V cambia con respecto a la longitud del lado x. Si la longitud del lado del contenedor aumenta de 2 cm a 3 cm, ¿cuánto aumenta el volumen?

2. Dada la función cúbica $P(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, que describe la población P en función del tiempo t (en años), encuentra los puntos donde la población es cero y discute su comportamiento en esos puntos.

3. Una planta crece de manera, que su altura (cm) en función del tiempo (días) se describe mediante una función cúbica. Dada la función $h(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 1$, determina los puntos en los que la altura de la planta es un centímetro. Interpreta los resultados.

Evaluación formativa 12.1

1. Una persona que se ejercita caminando a una velocidad de 4 km/h quemará 210 calorías en una hora; si lo hace a 9 km/h quemará 370 calorías.

   a) Determina una función lineal, que represente las calorías quemadas en relación con la velocidad.

b) Representa gráficamente la función, y argumenta cuál es la tendencia de calorías quemadas respecto a la velocidad con que se camina.

c) Calcula cuántas calorías quemará si camina a 8.5 km/h.

2. Una nueva cafetería proyecta que sus utilidades anuales $u(t)$ en miles de dólares durante los primeros seis años en el negocio, pueden aproximarse mediante la función $u(t) = 0.2t^2 + 5.4t - 8$, donde t se mide en años.

   a) Calcula la utilidad de la cafetería al inicio, ¿qué interpretación le das?

   b) Calcula las utilidades de la cafetería después del primer año, ¿qué conclusión obtienes a partir de este resultado?

   c) Calcula las utilidades de la cafetería después del quinto año, ¿qué deducción obtienes?

   d) Calcula el tiempo necesario para que la cafetería alcance el punto de equilibrio, ¿cómo lo puedes explicar?

3. La función $D(x) = (-0.0008)(x^3 + x^2 - 72x)$, da la cantidad de alcohol en la sangre, x horas después de haber bebido una cantidad estándar de alcohol. Desde el punto de vista jurídico, una persona está ebria si la cantidad de alcohol en su sangre es al menos 0.10 g/L.

   a) Determina los tiempos en los que una persona está ebria, desde el punto de vista jurídico.

   b) ¿En qué intervalos de tiempo la persona no se considere ebria?

   c) ¿Cuándo se alcanza el máximo porcentaje del alcohol en la sangre?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 12. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Desarrollé o interpreté un modelo matemático que representa a una situación o fenómeno. (M2-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

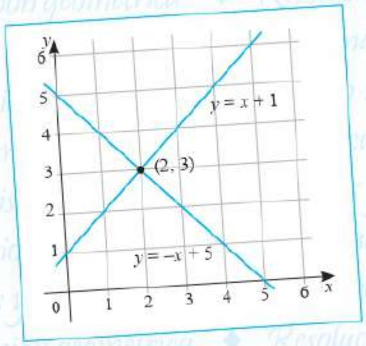
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 12, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Desarrolló o interpretó un modelo matemático que representa a una situación o fenómeno. (M2-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Resolución de problemas aplicando sistemas de ecuaciones lineales y su interpretación geométrica



Progresión de aprendizaje 13

Resuelve problemáticas provenientes de las áreas del conocimiento, que involucren la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y considera una interpretación geométrica de estos sistemas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M3-C3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 13.1

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Observa la siguiente imagen y determina el valor del círculo y el triángulo.

   ● + ▲ = 10 ________________

   ¿Hay más de una solución? _________

2. Observa la siguiente imagen y determina el valor del círculo y el triángulo que resuelva ambas ecuaciones.

   ● + ▲ = 10

   2● − ▲ = 8

   ____

   a) ¿Hay más de una solución? _____

3. Grafica la siguiente ecuación.

   $$y = 2x + 5$$

4. Modela dos ecuaciones de la siguiente situación:

   En un grupo de tu preparatoria se realizó una encuesta de la preferencia entre el videojuego *Freefire*® y *Roblox*®. El día de la entrevista, asistieron 36 alumnos y se sabe que al doble de los estudiantes les gusta más *Freefire*® que *Roblox*®.

   a) Ecuación 1: ________________________

   b) Ecuación 2: ________________________

Existen situaciones que se pueden modelar con una ecuación lineal con dos incógnitas, por ejemplo, en el estacionamiento de tu preparatoria hay 30 vehículos, entre carros y motocicletas. Una ecuación que modela este planteamiento, es la siguiente: si x es el número de carros y y el número de motos, entonces: $x + y = 30$, o bien, $y = 30 - x$ con $1 \leq x \leq 30$.

Según la ecuación anterior, si hay un carro tendrás 29 motocicletas, si hay dos carros tendrás 28 motocicletas; y así sucesivamente, en total tendremos 29 soluciones. Si ese mismo día, llegó María a la escuela y contó 84 neumáticos en el estacionamiento, ¿seguirás teniendo las 29 soluciones posibles?

En ocasiones, para modelar una situación de la vida real encontramos que, en ella, se presentan varias variables relacionadas por más de una condición. Un sistema de ecuaciones lineales, puede utilizarse para representar y resolver este tipo de problemas, en los que se presentan dos o más variables de las cuales se conocen datos e información que las relacionan.

Se llama sistema de ecuaciones lineales, a todo conjunto de ecuaciones lineales formado por dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas. Hablar de un sistema de ecuaciones de 2×2, hace referencia a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, un sistema de ecuaciones de 3×3, es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y así sucesivamente.

Resolver un sistema de ecuaciones, es hallar la solución común a todas las ecuaciones del sistema, es decir, el conjunto de valores (un valor para cada incógnita) que satisfacen simultáneamente cada una de las ecuaciones.

Los métodos más comunes para resolver estos sistemas, son el método gráfico, el método de igualación, el método de sustitución y el método de reducción, mismos que se detallan a continuación.

Método gráfico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Anteriormente estudiaste la representación gráfica de una función lineal, donde te diste cuenta de que corresponde a una línea recta. Al graficar un sistema con dos ecuaciones lineales, tendremos dos líneas rectas representadas en un sistema de coordenadas, donde se pueden presentar tres casos:

1. Las rectas se intersecan en un punto, por lo que el sistema tiene una única solución.
2. Las rectas son paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.
3. Las rectas coinciden, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

Para graficar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

- Si la ecuación (o ambas) está en la forma $ax + by + c = 0$, o bien $ax + by = d$, determina el cero de la ecuación y la ordenada en el origen, luego grafica los dos puntos en el plano y traza la recta que pasa por dichos puntos.
- Si la ecuación (o ambas) está en la forma $y = mx + b$, usa el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente de la recta para graficar los dos puntos en el plano, luego traza la recta que pasa por dichos puntos.
- Si la ecuación no está en ninguna de esas formas, redúcela a una de ellas.
- Compara gráficamente la situación relativa de una respecto a la otra.

Ejemplo formativo 13.1

Grafica y determina la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

Resolución:

Como la ecuación es de la forma $y = mx + b$, usaremos el valor de la ordenada en el origen y de la pendiente de la recta para graficar los dos puntos en el plano y con ello trazar la recta.

$$y = x + 1$$

La ordenada al origen es $b = 1$ y la pendiente es $m = 1$.

$$y = -x + 5$$

La ordenada al origen es $b = 5$ y la pendiente es $m = -1$.

Al graficar ambas ecuaciones tenemos la gráfica de la Figura 13.1

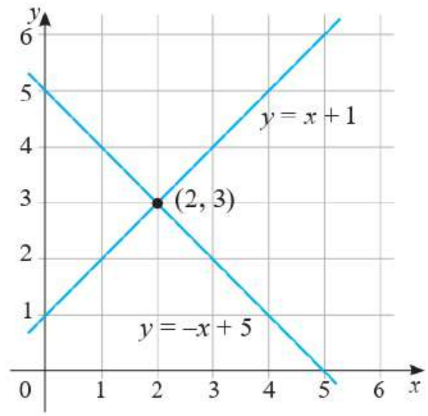


Figura 13.1. Sistema de ecuaciones lineales con una única solución. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Comprobación:

Ecuación 1: $y = x + 1$	Ecuación 2: $y = -x + 5$
$3 = 2 + 1$	$3 = -2 + 5$
$3 = 3$	$3 = 3$

Como se intersecan en un punto, tenemos una única solución: $x = 2$ y $y = 3$.

Ejemplo formativo 13.2

Grafica y determina la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$

Resolución:

Como las ecuaciones son de la forma $ax + by = d$ y $ax + by + c = 0$ respectivamente, determinaremos el cero de la ecuación y la ordenada en el origen.

Ecuación 1: $x + 2y = 2$

Cero de la ecuación

Hagamos $y = 0$

$$x - 2(0) = 2$$
$$x = 2$$

La intersección en x es (2, 0).

Ordenada en el origen

Hagamos $x = 0$

$$0 + 2y = 2$$
$$2y = 2$$
$$y = \frac{2}{2}$$
$$y = 1$$

La intersección en y es (0, 1).

Ecuación 2: $2x + 4y - 4 = 0$

Cero de la ecuación

Hagamos $y = 0$

$$2x + 4(0) - 4 = 0$$
$$x = 2$$

La intersección en x es (2, 0).

Ordenada en el origen

Hagamos $x = 0$

$$2(0) + 4y - 4 = 0$$
$$4y = 4$$
$$y = \frac{4}{4}$$
$$y = 1$$

La intersección en y es (0, 1).

Las rectas intersecan los ejes en los mismos puntos como se muestran en la Figura 13.2.

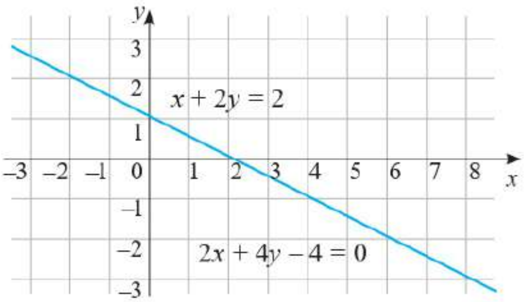


Figura 13.2. Sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Dado que las rectas coinciden, el sistema tiene infinitas soluciones.

Ejemplo formativo 13.3

Grafica y determina la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$

Resolución:

Para la primera ecuación, usaremos la ordenada en el origen y la pendiente de la recta. La ecuación $y = 2x + 3$ tiene pendiente $m = 2$ y ordenada en el origen $b = 3$.

Para la segunda ecuación, usamos el cero de la ecuación y la ordenada en el origen.

Cero de la ecuación

Hagamos $y = 0$

$$4x - 2(0) = 6$$
$$4x = 6$$
$$x = \frac{6}{4}$$
$$x = \frac{3}{2}$$

La intersección en x es (3/2, 0).

Ordenada en el origen

Hagamos $x = 0$

$$4(0) - 2y = 6$$
$$-2y = 6$$
$$y = \frac{6}{-2}$$
$$y = -3$$

La intersección en y es (0, –3).

Al graficar, tenemos la gráfica de la Figura 13.3:

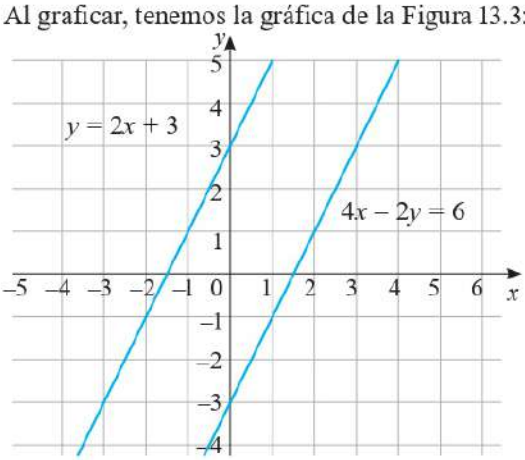


Figura 13.3. Sistema de ecuaciones lineales sin solución.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Las rectas son paralelas, por lo que el sistema no tiene solución.

Actividad formativa 13.1

1. Las rectas en la Figura 13.4 representan a un sistema de ecuaciones de 2×2, ¿cuántas soluciones tiene cada sistema de ecuaciones?

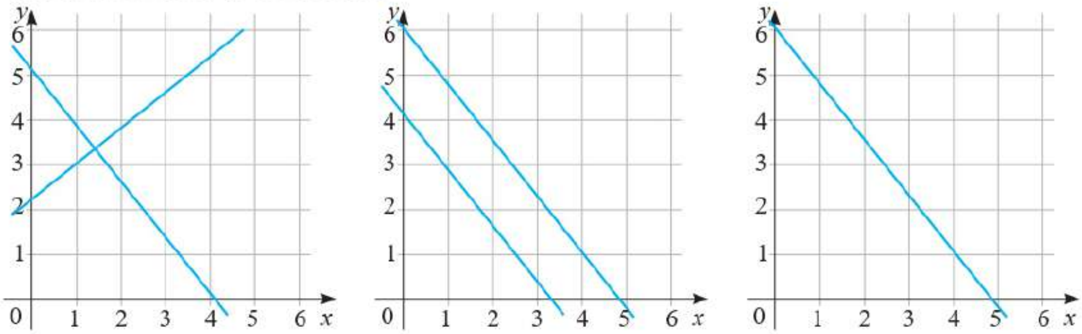


Figura 13.4. Representación gráfica de los tres casos posibles de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

2. Usa el método gráfico para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ y + 2x = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$

Interpretación geométrica de la solución de un sistema de ecuaciones

La solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, la podemos ver de manera geométrica, dado que la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema es una recta y este par de rectas se pueden intersecar, ser paralelas o pueden coincidir. Con base a esto, lo podemos clasificar como un sistema de ecuaciones consistente o inconsistente, comparando las pendientes y las ordenadas en el origen entre las rectas de cada sistema, como lo veremos en la Tabla 13.1.

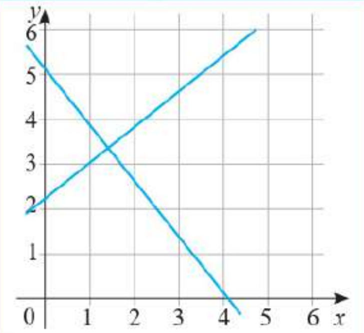
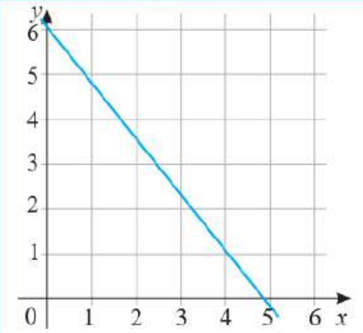
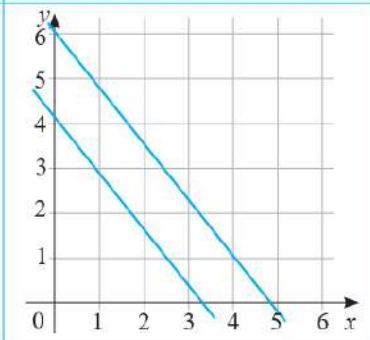
Sistemas consistentes		Sistema inconsistente
Solución única	Infinito número de soluciones	No tiene solución
Independiente	Dependiente	
		
Las rectas se intersecan en un solo punto. Las rectas tienen pendientes diferentes ($m_1 \neq m_2$).	Las rectas coinciden. Las rectas tienen pendientes iguales ($m_1 = m_2$) y ordenadas en el origen iguales ($b_1 = b_2$).	Las rectas no se intersecan. Las rectas tienen pendientes iguales ($m_1 = m_2$) y ordenadas en el origen diferentes ($b_1 \neq b_2$).

Tabla 13.1. Sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 consistentes e inconsistente.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Actividad formativa 13.2

Determina si los siguientes sistemas son consistentes (independiente o dependiente) o inconsistentes, ayúdate llenando la siguiente tabla:

Sistema	Relación entre las pendientes	Ordenadas en el origen	Número de soluciones	Tipo de sistema
$\begin{cases} y = 3x - 5 \\ y = 3x + 2 \end{cases}$				
$\begin{cases} y - 2x = 1 \\ y + 2x = 5 \end{cases}$				
$\begin{cases} 2x - 3y - 6 = 0 \\ 4x - 6y - 12 = 0 \end{cases}$				

Métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

De los métodos mencionados anteriormente, para resolver sistemas de ecuaciones, el método de igualación, el de sustitución y el de reducción son métodos algebraicos. Estos métodos proporcionan el conjunto solución preciso, no como en el caso del método gráfico, por lo general aproximado.

Igualación	Sustitución	Reducción
Consiste en aislar la misma incógnita en las dos ecuaciones, para igualarlas, obtener una ecuación con una sola incógnita y encontrar su valor, para luego, sustituir su valor en una de las ecuaciones despejadas y así encontrar el valor de la segunda incógnita.	Consiste, en elegir una incógnita para despejarla en una ecuación y luego sustituirla en la otra ecuación del sistema, de manera que se pueda resolver una de las incógnitas, luego sustituir su valor en la ecuación despejada para encontrar el valor restante.	Consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones, por un número apropiado de manera que al sumar o restar las ecuaciones, una de las incógnitas se cancele. Esto permite resolver la otra incógnita, y luego sustituir su valor en una de las ecuaciones originales para hallar el valor restante.

Tabla 13.2. Métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024)

Un sistema de ecuaciones lineales, puede utilizarse para representar y resolver problemas del mundo real, en las áreas de química, economía, física, geometría, etc. en la que se presentan dos o más variables, de las cuales se conocen datos e información que las relacionan.

Ejemplo formativo 13.4

En un restaurante, la propina se divide en partes iguales entre los trabajadores. Si hubieran sido cuatro trabajadores menos, cada uno habría recibido 750 pesos, y de haber sido cuatro trabajadores más cada uno habría recibido 150 pesos. Determina el número de trabajadores y la cantidad de propina que recibió cada uno de ellos.

Resolución:

Sea x el número de trabajadores y y la propina total, de acuerdo con la información del problema, se tiene que:

- si hubieran sido cuatro trabajadores menos: $\frac{y}{x-4} = 750$
- si fueran cuatro trabajadores más: $\frac{y}{x+4} = 150$

Por lo que se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y = 750x - 3000 \\ y = 150x + 600 \end{cases}$

Este sistema de ecuaciones lo resolveremos por el **método de igualación.**

Paso 1. Despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones.

$$y = 750x - 3000$$

$$y = 150x + 600$$

Paso 2. Iguala las dos ecuaciones despejadas, con lo cual se obtiene una ecuación con una incógnita.

$$750x - 3000 = 150x + 600$$

Paso 3. Resuelve la ecuación que resulte.

$$750x - 150x = 600 + 3000$$

$$600x = 3600$$

$$x = \frac{3600}{600}$$

$$x = 6$$

Paso 4. Sustituye el valor encontrado en cualquiera de las dos ecuaciones obtenidas en el paso 1 para encontrar la incógnita.

$$y = 150(6) + 600$$

$$y = 900 + 600$$

$$y = 1500$$

Paso 5. Comprobación. El número de trabajadores obtenido es seis y la propina es 1500. Con cuatro trabajadores menos el número de trabajadores es dos y cada uno recibe 750 de propina. Con cuatro trabajadores más el total de trabajadores es 10 y la propina recibida es de 150 pesos. Por tanto, se cumplen las condiciones del problema.

De ahí que, en el restaurante hay seis trabajadores y la propina total es de $1,500.00, por lo que a cada trabajador le corresponden $250.00.

Actividad formativa 13.3

Resuelve los siguientes problemas por el método de igualación:

1. En el estacionamiento de tu preparatoria hay 30 vehículos, entre carros y motocicletas. María contó que hay 84 neumáticos, ¿cuántos carros y cuántas motocicletas hay?
2. En la antigua Mesopotamia, existió una gran civilización, los babilonios, quienes fueron los primeros que se conoce hasta la fecha, en resolver sistemas de ecuaciones lineales; dicha civilización, llamaba a las incógnitas con palabras como longitud, anchura, área o volumen, aunque estas incógnitas no tuvieran relación con problemas de medidas. Un ejemplo tomado de una tablilla babilónica, plantea un sistema de ecuaciones como el siguiente:

- $\frac{1}{4}$ de anchura + longitud = 7 manos
- longitud + anchura = 10 manos

  a) ¿A cuántas manos equivale la anchura?

  b) ¿A cuántas manos equivale la longitud?

Resuelve el sistema.

Para resolver un problema, podemos utilizar representaciones de figuras geométricas, las cuales facilitan la visualización de los datos y las incógnitas de este.

Ejemplo formativo 13.5

Un abuelo, compró un terreno rectangular y dijo a los nietos, que el que adivinara las medidas del terreno se quedaría con él; la única información que les dio es que el perímetro del terreno es de 60 m y que el largo mide 12 m más que su ancho. ¿Puedes determinar cuánto mide cada lado del terreno?

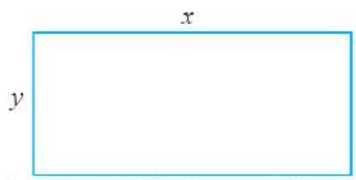


Figura 13.5. Rectángulo con medidas x, y.
Fuente: Elaboración propia (Word, 2024).

Resolución:

Sea x el largo y y el ancho del terreno, como se observa en la Figura 13.5.

Como el perímetro del rectángulo, es la suma de las longitudes de sus lados y es igual a 60 m, se obtiene la ecuación $2x + 2y = 60$ o bien $x + y = 30$.

Otro dato aportado, es que el largo mide 12 m más que su ancho, luego una segunda ecuación es $x = y + 12$, y se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x = y + 12 \end{cases}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, usaremos el **método de sustitución**.

Paso 1. Despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

Si observamos las ecuaciones, en la segunda ecuación esta despejada la incógnita x

$x = y + 12$

Paso 2. Sustituye la expresión obtenida en el paso 1, en la otra ecuación.

$(y + 12) + y = 30$

Paso 3. Resuelve la ecuación que resulte.

$2y = 30 - 12$

$2y = 18$

$y = \frac{18}{2}$

$y = 9$

Paso 4. Sustituye el valor encontrado en la ecuación obtenida en el paso 1, para encontrar el valor de la otra incógnita.

$x = 9 + 12$

$x = 21$

Paso 5. Comprobación. El largo obtenido es 21 m y ancho es 9 m. El perímetro es por tanto $2(21) + 2(9) = 60$. El largo $21 - 12 = 9$. Luego se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, el largo del terreno mide 21 m y el ancho 9 m.

Actividad formativa 13.4

Resuelve los siguientes problemas por el método de sustitución:

1. En un grupo de tu preparatoria, se realizó una encuesta de la preferencia entre el videojuego *Freefire®* y *Roblox®*, el día de la entrevista asistieron 36 alumnos y se sabe que al doble de los estudiantes les gusta más *Freefire®* que *Roblox®*. ¿Cuántos alumnos prefieren *Freefire®* y cuántos alumnos prefieren *Roblox®*?

2. Un hombre recibiría una liquidación de $36,000.00 por sus 15 años laborados, del cual le dijo a su esposa e hija que les daría $27,000.00 y $9,000.00 respectivamente. Sin embargo, al momento de ir al cajero solo disponía de 23,000 pesos, ¿qué cantidad debe recibir su esposa e hija respetando la proporción inicial?

En física, se estudia el movimiento de un cuerpo a velocidad constante. La velocidad constante, es cuando un objeto se mueve en línea recta y su velocidad se mantiene igual en todo momento. En otras palabras, el objeto se mueve a la misma velocidad durante todo su recorrido.

La ecuación para la velocidad constante es $v = \frac{d}{t}$; donde, d es la distancia recorrida, t es el tiempo transcurrido y v la velocidad del objeto.

Ejemplo formativo 13.6

Un hombre rema 16 km en dos horas río abajo a una velocidad constante, o bien, 12 km río arriba en cuatro horas. Encuentra la velocidad con la cual, rema en agua tranquila y la velocidad de la corriente del río.

Resolución:

Sea x la velocidad con la que rema en agua tranquila.

Sea y la velocidad de la corriente del río.

Cuando se rema río abajo, la velocidad efectiva es la suma de las velocidades que llevaría el remero en agua tranquila con la velocidad del río $(x + y)$, y cuando se rema río arriba es la diferencia $(x - y)$. Observa la siguiente tabla:

	Distancia (km)	Tiempo (h)	Velocidad (km/h)
Río abajo	16	2	8
Río arriba	12	4	3

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que tenemos es: $\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el método de reducción.

Paso 1. Suma o resta las ecuaciones del sistema para obtener una nueva ecuación con una incógnita.

$$\begin{array}{r} x + y = 8 \\ x - y = 3 \\ \hline 2x + 0 = 11 \end{array}$$

Paso 2. Resuelve la ecuación que resulte del paso anterior.

$2x = 11$, de donde $x = \frac{11}{2}$

Paso 3. Sustituye el valor obtenido en el paso 2, en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita.

$$x + y = 8$$
$$y = 8 - x$$
$$y = 8 - \frac{11}{2}$$
$$y = \frac{5}{2}$$

Paso 4. Comprobación. La velocidad en agua tranquila obtenida es 5.5 km/h y la velocidad de la corriente del río es 2.5 km/h. La velocidad remando río abajo es $5.5 + 2.5 = 8$. La velocidad remando río arriba es $5.5 - 2.5 = 3$. Luego se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, la velocidad con que rema el hombre en agua tranquila es 5.5 km/h y la velocidad de la corriente del río es 2.5 km/h.

Ejemplo formativo 13.7

En una empresa cerca de tu comunidad, se invirtieron $10,000.00 en dos bonos que pagan el 10% y 15% de interés simple. Si el interés anual es de $1,350.00, ¿cuánto se invirtió en cada bono?

Resolución:

Sea x el bono que paga el 10% y y el bono que paga el 15%.

Como el monto del interés anual es de $1,350.00, resulta la ecuación $0.1x + 0.15y = 1350$. Por otro lado, el total de los bonos invertidos es de $10,000.00, de donde se obtiene que $x + y = 10000$ y por tanto se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0.1x + 0.15y = 1350 \\ x + y = 10000 \end{cases}$$

Resolvamos el sistema de ecuaciones por el **método de reducción.**

Sugerencia: Si al sumar o restar las dos ecuaciones, no se elimina ninguna de las incógnitas, es necesario multiplicar una o ambas ecuaciones por un número apropiado tal, que la suma algebraica de los coeficientes de x o de y sumen cero.

Al sumar las dos ecuaciones no se elimina ninguna de las incógnitas, hay que multiplicar la primera ecuación por –10, lo cual permite eliminar la incógnita x.

$$\begin{cases} \mathbf{-10}(0.1x + 0.15y) = \mathbf{-10}(1350) \\ x + y = 10000 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -x - 1.5y = -13500 \\ x + y = 10000 \end{cases}$$

Paso 1. Suma o resta las ecuaciones del sistema para obtener una nueva ecuación con una incógnita

$$\begin{array}{r} -x - 1.5y = -13500 \\ x + y = 10000 \\ \hline 0 - 0.5y = -3500 \end{array}$$

Paso 2. Resuelve la ecuación que resulte del paso anterior.

$$y = \frac{-3500}{-0.5}$$

$$y = 7000$$

Paso 3. Sustituye el valor obtenido en el paso 2, en cualquiera de las ecuaciones originales para encontrar el valor de la otra incógnita.

$x + y = 10000$

$x = 10000 - y$

$x = 10000 - 7000$

$x = 3000$

Paso 4. Comprobación. El bono que paga el 10% es de 3000 pesos, por tanto, el interés anual es de 300 pesos. El otro bono que es de 7000 pesos paga el 15% es decir 1050 pesos y la suma de los intereses es 1350. Luego se cumplen las condiciones del problema.

Por lo tanto, el bono que pagó el 10% fue de $3,000.00 y el del 15% fue el de $7,000.00.

Actividad formativa 13.5

Resuelve los siguientes problemas por el método de reducción:

1. Un avión vuela a velocidad constante de 800 km/h a favor del viento, mientras que contra el mismo viento lo hace a 720 km/h. Encuentra la velocidad del viento y la velocidad del avión en aire tranquilo.

2. En tu salón, decidieron vender desayunos de tortas y hamburguesas para sacar fondos para el día de las madres, el costo de la torta es de \$25.00 y de la hamburguesa \$32.00, el lunes vendieron 100 desayunos y recolectaron un total de \$2,815.00, ¿qué se vendió más, la torta o la hamburguesa?

EVALUACIÓN FORMATIVA 13.1

1. Observa la gráfica de la Figura 13.6 y responde lo siguiente:

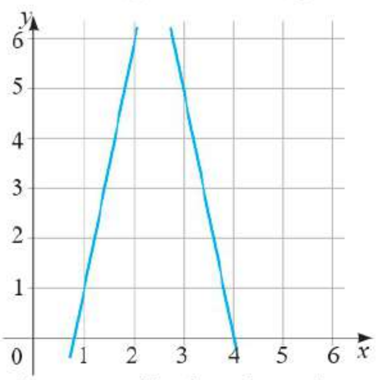


Figura 13.6. Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

a) ¿El sistema es consistente o inconsistente? ¿Por qué?

b) Determina el sistema de ecuaciones lineales.

c) Calcula la solución del sistema de ecuaciones.

2. Para resolver los siguientes problemas, utiliza sistemas de ecuaciones lineales y resuélvelos mediante el método que consideres más apropiado.

   a) El perímetro de un triángulo isósceles es de 37 cm. La medida de cada uno de los lados iguales excede en 11 cm la medida del lado diferente, ¿cuáles son las medidas de los lados?

   b) Un propietario recibió \$112,000.00 por pago de renta de dos casas en un año, siendo la renta mensual de una de las casas \$1,000.00 más que la otra, ¿cuál fue la renta mensual de cada una, si la más barata estuvo desalquilada cuatro meses?

   c) En el laboratorio de tu escuela ocupan una solución con alcohol al 90%, al buscar la solución encuentras dos soluciones con alcohol, una contiene alcohol al 80% y la otra contiene alcohol al 96%, ¿qué cantidad de cada solución se deberá usar para obtener 20 litros de una solución con alcohol al 80%?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna, la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 13. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Apliqué diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de índole diversa. (M3-C3)			

Coevaluación para el aprendizaje

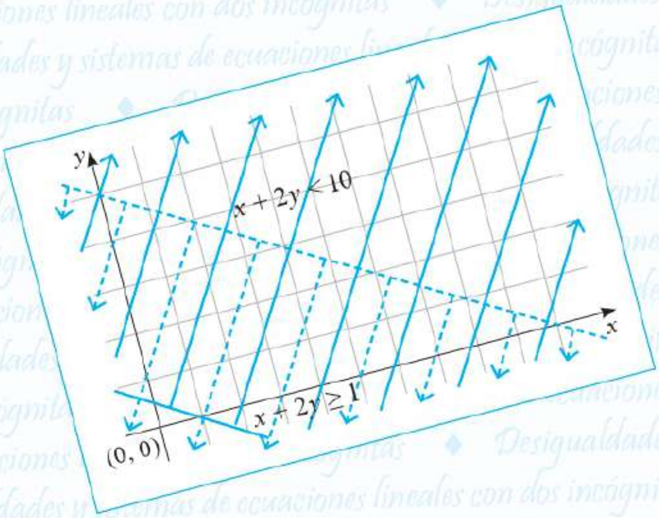
Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna, la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo en equipo en la progresión de aprendizaje 13 y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Aplicó diferentes métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales para resolver problemas de índole diversa. (M3-C3)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Desigualdades y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas



Progresión de aprendizaje 14

Modela situaciones y resuelve problemas en los que se busca optimizar valores aplicando el teorema fundamental de la programación lineal y combinando elementos del lenguaje algebraico que conciernen al estudio de desigualdades y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Metas de aprendizaje		En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
M4-C2 Argumenta a favor o en contra de afirmaciones acerca de situaciones, fenómenos o problemas propios de la matemática, de las ciencias o de su contexto.	A			
	C			
	H			
M4-C3 Construye y plantea posibles soluciones a problemas de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno, empleando técnicas y lenguaje matemático.	A			
	C			
	H			
M3-C4 Organiza los procedimientos empleados en la solución de un problema a través de argumentos formales para someterlo a debate o a evaluación.	A			
	C			
	H			

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA 14.1

1. Activa los conocimientos previos relacionando la descripción con el concepto.

Descripción		Concepto
a) ¿Qué significa resolver un sistema de ecuaciones?	( )	Solución del sistema.
b) Es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen a ambas ecuaciones.	( )	Hallar todas las soluciones.
c) Métodos que puedes utilizar para resolver un sistema de ecuaciones.	( )	$<, >, \leq, \geq$.
d) Signos que se usan para representar desigualdades.	( )	$3x - 2 \geq 4$.
e) Ejemplo de desigualdad.	( )	Gráfico, reducción.

Figura 14.1. Siembra de maíz.
Fotografía, César Pilar Quintero Campos.

Imagina a un agricultor en Sinaloa, trabajando arduamente en sus tierras para asegurar una cosecha abundante y rentable. Tiene a su disposición dos tipos de cultivos: maíz y frijol. Cada hectárea de maíz requiere una inversión considerable en semillas y fertilizantes, pero ofrece un buen rendimiento económico. Por otro lado, el frijol es menos costoso de sembrar, aunque su beneficio por hectárea es menor.

El agricultor cuenta con un presupuesto limitado, tanto para semillas como para fertilizantes, y debe tomar decisiones estratégicas para maximizar sus beneficios sin exceder sus recursos disponibles. Además, debe considerar las restricciones de tiempo y mano de obra para asegurarse de que sus decisiones sean viables.

Por ejemplo, si un agricultor quiere **minimizar** los costos de producción en su parcela debe considerar que para cultivar una hectárea de frijol, necesita \$5,000.00 en semillas y \$5,000.00 en fertilizantes, mientras que para cultivar una hectárea de maíz, gasta \$10,000.00 en semillas y \$5,000.00 en fertilizantes. El agricultor tiene \$180,000.00 disponibles para semillas y \$120,000.00 disponibles para fertilizantes, ¿cuántas hectáreas de frijol y maíz debe cultivar para minimizar sus costos de producción?

En este contexto, para lograr lo anterior surge la necesidad de aplicar técnicas matemáticas avanzadas para optimizar sus decisiones de cultivo. Aquí entra en juego la programación lineal, una herramienta que permite modelar estas situaciones de optimización, mediante el uso de desigualdades y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, el agricultor puede determinar la combinación óptima de hectáreas de maíz y frijol que maximiza sus beneficios mientras cumple con todas las restricciones de recursos.

Así, la optimización de valores en la resolución de problemas juega un papel importante donde se busca **maximizar** beneficios, y **minimizar** costos asociados en alguna situación para encontrar la **solución óptima** considerando restricciones.

Desigualdades lineales con dos incógnitas

Una inecuación lineal con dos variables es una expresión de la forma $ax + by < c$ (o bien, $>$, $\leq$, $\geq$) con a, b y $c \in \Re$. Una inecuación lineal relaciona dos cantidades desconocidas a través de una desigualdad como mayor que ($>$), menor que ($<$), mayor o igual que ($\geq$) o menor o igual que ($\leq$). Por ejemplo, $\mathbf{2x + 3y < 10}$, es una desigualdad lineal con las variables "***x***" y "***y***".

Interpretar geométricamente una desigualdad de dos variables implica visualizar la región en el plano cartesiano que satisface la inecuación. Para hacerlo, primero graficamos la recta correspondiente a la ecuación que resultaría si reemplazamos la desigualdad por una igualdad (=). Luego, utilizando un punto de prueba, determinamos qué región del plano satisface la inecuación.

Ejemplo formativo 14.1

Traza la gráfica de la siguiente inecuación lineal con dos variables $2x + 3y < 10$.

Resolución:

Paso 1. Sustituye el signo de la desigualdad por un signo igual (=) y traza la gráfica de la ecuación resultante. En caso de que la inecuación tenga signo menor que ($<$) o mayor que ($>$), **usa una línea punteada;** si la inecuación tiene signo menor o igual que ($\leq$) o mayor igual que ($\geq$), **usa una línea sólida**.

$$2x + 3y < 10$$

Para graficar una ecuación lineal, basta con encontrar dos puntos; en este caso consideremos el intercepto con el eje "x" y el intercepto con el eje "y".

Para $x = 0$

$$2(0) + 3y = 10$$
$$3y = 10$$
$$y = \frac{10}{3}$$

Para $y = 0$

$$2x + 3(0) = 10$$
$$2x = 10$$
$$x = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

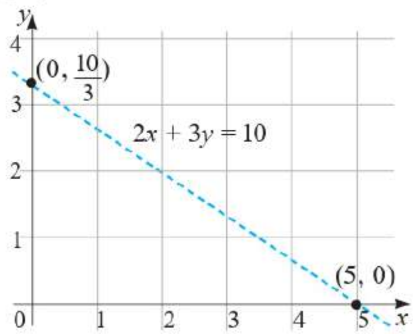


Figura 14.2. Gráfica de la ecuación $2x + 3y = 10$. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Los dos puntos son entonces $(0, \frac{10}{3})$ y $(5, 0)$ con los cuales podemos trazar la recta $2x + 3y = 10$ con línea punteada por ser el signo de la desigualdad menor que ($<$) como se muestra en la Figura 14.2.

Paso 2. Selecciona un punto de prueba en cada región (semiplano), por abajo de la gráfica (semiplano inferior) y por arriba de la gráfica (semiplano superior) como se muestra en la Figura 14.3.

Punto de prueba por abajo de la gráfica:

$$(0, 0)$$
$$2x + 3y < 10$$
$$2(0) + 3(0) < 10$$
$$0 < 10$$

Satisface la desigualdad.

Punto de prueba por arriba de la gráfica:

$$(3, 2)$$
$$2x + 3y < 10$$
$$2(3) + 3(2) < 10$$
$$12 < 10$$

No satisface la desigualdad.

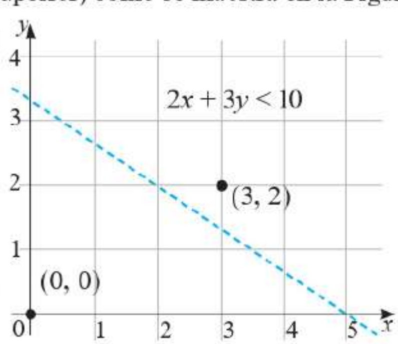


Figura 14.3. Puntos de prueba para la inecuación $2x + 3y < 10$. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Por lo anterior, se conoce que los puntos que satisfacen la inecuación se encuentran en el semiplano inferior. Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación $2x + 3y < 10$ está representado geométricamente por el semiplano inferior (ver Figura 14.4).

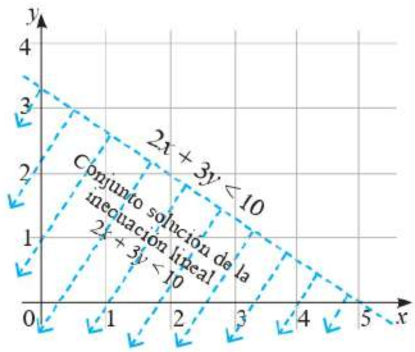


Figura 14.4. Conjunto solución de la inecuación con dos variables $2x + 3y < 10$.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Resolución de sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas

Para la resolución de sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas utilizaremos el método gráfico. La gráfica de un sistema de desigualdades de dos variables en el plano cartesiano es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisface simultáneamente cada desigualdad en el sistema, es decir, geométricamente, la intersección de los semiplanos que contienen las soluciones de cada inecuación. La gráfica de un sistema de desigualdades puede obtenerse trazando la gráfica de cada desigualdad individualmente y, después, determinando si se intersecan o no.

Ejemplo formativo 14.2

Vamos a resolver gráficamente el siguiente sistema de desigualdades lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} x + 2y \geq 1 \\ x + 2y < 10 \end{cases}$$

Resolución:

Consideramos primeramente las ecuaciones lineales que se obtienen al sustituir el signo de la desigualdad por un signo (=), para trazar las rectas correspondientes en el plano cartesiano. En este caso, determinaremos el intercepto con el eje "x" y el intercepto con el eje "y", en cada una de las ecuaciones.

$$x + 2y = 1$$

Para $x = 0$

$$(0) + 2y = 1$$
$$2y = 1$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Para $y = 0$

$$x + 2(0) = 1$$
$$x = 1$$

Los puntos a graficar son:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) y\ (1, 0)$$

Se usa una línea sólida porque el signo de la desigualdad es $\geq$. Ver figura 14.5.

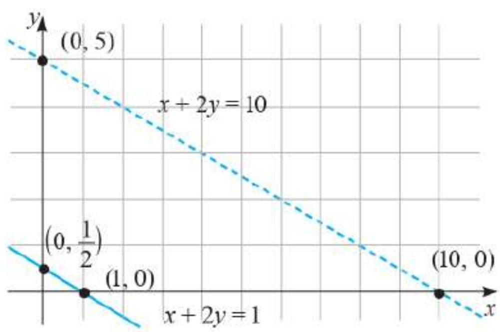


Figura 14.5. Gráficas de las ecuaciones $x + 2y = 1$, $x + 2y = 10$. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

$$x + 2y = 10$$

Para $x = 0$

$$(0) + 2y = 10$$
$$2y = 10$$
$$y = \frac{10}{2}$$
$$y = 5$$

Para $y = 0$

$$x + 2(0) = 10$$
$$x = 10$$

Los puntos a graficar son:

$$(0, 5)\ y\ (10, 0)$$

Se usa una línea punteada porque el signo de la desigualdad es $<$. Ver Figura 14.5.

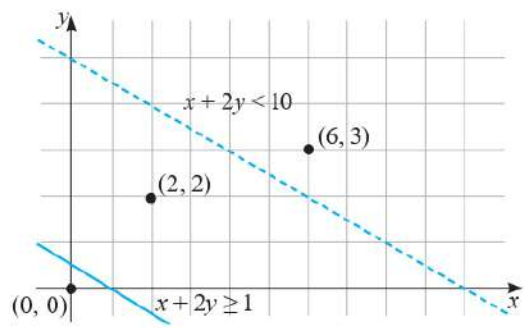


Figura 14.6. Puntos de prueba para cada inecuación $x + 2y \geq 1$, $x + 2y < 10$. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Tomar los puntos de prueba como se muestra en la Figura 14.6.

$$x + 2y \geq 1$$

Punto de prueba por abajo de la gráfica, (0, 0).

$$(0) + 2(0) \geq 1$$
$$0 \geq 1$$

No satisface la desigualdad.

Punto de prueba por arriba de la gráfica, (2, 2).

$$(2) + 2(2) \geq 1$$
$$6 \geq 1$$

No satisface la desigualdad.

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación $\mathbf{x + 2y \geq 1}$, está representado geométricamente por el semiplano superior.

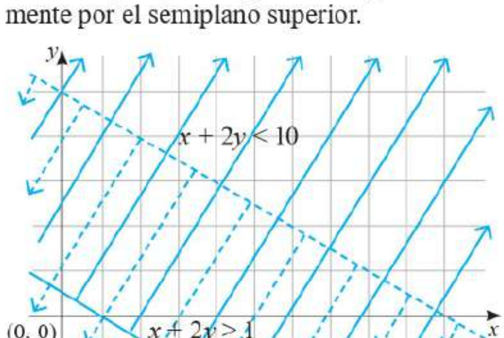


Figura 14.7. Conjunto solución de cada inecuación lineal de dos variables. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

$$x + 2y < 10$$

Punto de prueba por abajo de la gráfica, (2, 2).

$$(2) + 2(2) < 10$$
$$6 < 10$$

No satisface la desigualdad.

Punto de prueba por arriba de la gráfica, (6, 3).

$$(6) + 2(3) < 10$$
$$12 < 10$$

No satisface la desigualdad.

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación $\mathbf{x + 2y < 10}$, está representado geométricamente por el semiplano inferior.

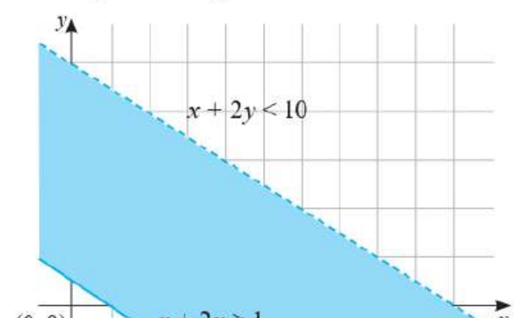


Figura 14.8. Conjunto solución del sistema de inecuaciones. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Por tanto, el conjunto solución del sistema es la intersección de ambos semiplanos, como aparece sombreado en la Figura 14.8.

Actividad formativa 14.1

1. Resuelve gráficamente los siguientes sistemas de desigualdades lineales con dos incógnitas.

a) $\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y > 1 \\ 2x - y < 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 3 \end{cases}$

La programación lineal

La **programación lineal** es una herramienta para la toma de decisiones utilizada para **optimizar** (maximizar o minimizar) una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones expresadas también de forma lineal. La función lineal por optimizar se denomina **función objetivo**, y las **restricciones** se expresan mediante un sistema de inecuaciones lineales a resolver. Se utiliza en diversos campos como la economía, la ingeniería, la gestión de operaciones, la logística y otros, para resolver problemas de optimización.

En esta progresión se abordarán situaciones de programación lineal en dos dimensiones y su expresión general es, por tanto:

Función objetivo: $f(x, y) = a \bullet x + b \bullet y \rightarrow$ **Máximo o mínimo**, donde $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos constantes.

$$\text{Restricciones} \begin{cases} a_1 \bullet x + b_1 \bullet y > c_1 \\ a_2 \bullet x + b_2 \bullet y > c_2 \\ \cdots \\ a_k \bullet x + b_k \bullet y > c_k \end{cases} ;\ a_i, b_i, c_i,\ i = 1, 2, \cdots, k \text{ son constantes.}$$

El símbolo mayor que (>) se representa por una desigualdad según sea la situación, como se describe a continuación: mayor que (>), menor que (<), mayor o igual que (≥), menor o igual que (≤). Generalmente, una de las restricciones es que los valores de las variables sean mayores o iguales que cero, es decir: $\boldsymbol{x \geq 0}$ e $\boldsymbol{y \geq 0}$.

La región formada por el conjunto de puntos (x, y) que son posibles soluciones se llama **región factible**, como se muestra en la Figura 14.9. El conjunto de valores para las variables (x, y) de decisión que cumple con todas las restricciones del problema se llama **solución factible**.

Asimismo, a los valores para las variables (x, y) de decisión que maximizan o minimizan la función objetivo de la situación se les llama **solución óptima** y siempre se encuentran en la frontera de la región factible.

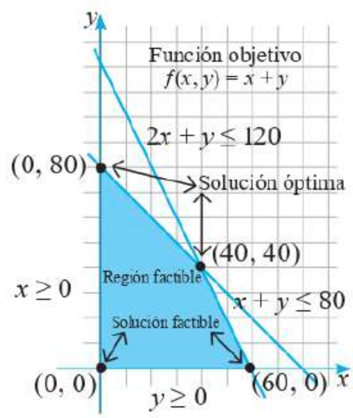


Figura 14.9. Región factible.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Actividad formativa 14.2

1. Relaciona la descripción con el concepto.

Descripción	Concepto
a) Condiciones o limitaciones que deben cumplir las variables de decisión en un problema.	( ) Función objetivo.
b) Representa el objetivo o criterio que se desea optimizar.	( ) Restricciones.
c) Región formada por el conjunto de puntos que son posibles soluciones.	( ) Programación lineal.
d) Herramienta para la toma de decisiones.	( ) $3x - 2y \geq 4$.
e) Ejemplo de inecuación lineal con dos variables.	( ) Región factible.

Teorema fundamental de la programación lineal

En un problema de programación lineal con dos variables, si existe una solución única que optimice la función objetivo, ésta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible acotada, nunca en el interior de dicha región.

Tipos de soluciones en programación lineal

La solución de un problema de programación lineal para dos variables puede clasificarse, atendiendo al tipo de solución que presenta, como se describe en la Figura 14.10, 14.11, 14.12 y 14.13.

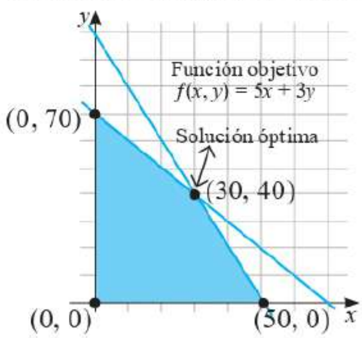


Figura 14.10. Región factible con solución única óptima.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

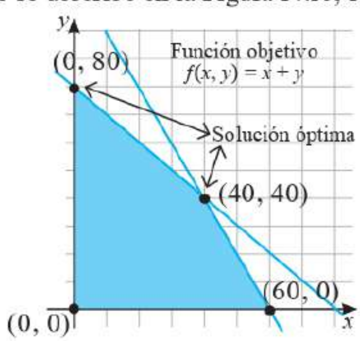


Figura 14.11. Región factible con solución óptima múltiple.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

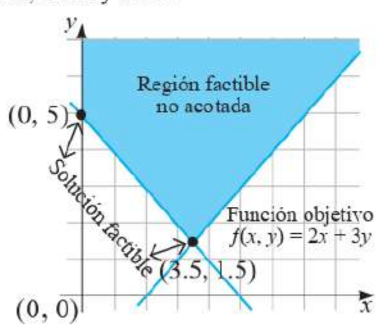


Figura 14.12. Región factible con solución no acotada.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Pasos para resolver situaciones mediante programación lineal

Paso 1. Definir el problema. Identificar el objetivo y las restricciones que se deben cumplir.

Paso 2. Identificar las variables. Identificar las variables que representan las cantidades que se desean determinar (maximizar o minimizar).

Paso 3. Definir la función objetivo. Formular una función lineal que exprese el objetivo a maximizar o minimizar.

Paso 4. Establecer restricciones. Identificar y formular las restricciones que limitan las variables de decisión.

Paso 5. Representar gráficamente las restricciones. Dibujar las restricciones en el plano cartesiano.

Paso 6. Encontrar la región factible. Identificar el conjunto de soluciones que satisfacen todas las restricciones del problema.

Paso 7. Identificar el vértice óptimo. Representa la solución óptima que maximiza o minimiza la función objetivo dentro de las restricciones establecidas.

Paso 8. Interpretar la solución. Se busca entender qué representan las variables de decisión y cómo afectan al problema en cuestión.

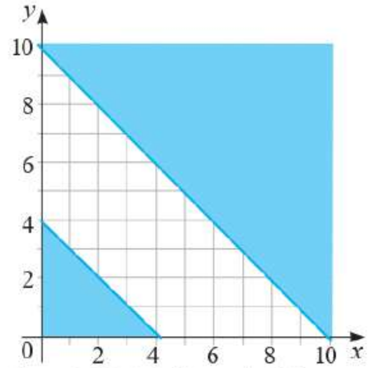


Figura 14.13. Solución no factible.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Ejemplo formativo 14.3

Un agricultor quiere **minimizar** los costos de producción en su parcela. Para cultivar una hectárea de frijol, gasta \$5,000.00 en semillas y \$5,000.00 en fertilizantes. Para cultivar una hectárea de maíz, gasta \$10,000.00 en semillas y \$5,000.00 en fertilizantes. El agricultor tiene \$180,000.00 disponibles para gastar en semillas y \$120,000.00 disponibles para gastar en fertilizantes, si va a cultivar tanto frijol como maíz, cuánticas hectóreas de cada tipo debe cultivar para minimizar los costos?

Resolución:

Paso 1. Definir el problema. El agricultor quiere conocer cuántas hectáreas de frijol y maíz debe cultivar para que los costos de producción se minimicen, cumpliendo las siguientes restricciones: gasto en semillas menor igual que \$180,000.00 y gasto en fertilizantes menor igual que \$120,000.00.

Paso 2. Identificar las variables.

Cantidad de hectáreas de frijol a cultivar: x

Cantidad de hectáreas de maíz a cultivar: y

Paso 3. Definir la función objetivo.

$\textit{Costo total de producción frijol} = \textit{semillas} + \textit{fertilizantes} = 5000x + 5000x = 10000x$

$\textit{Costo total de producción maíz} = \textit{semillas} + \textit{fertilizantes} = 10000y + 5000y = 15000y$

Función objetivo: $f(x, y) = 10000x + 15000y$

Paso 4. Establecer restricciones.

$$\text{Restricciones:} \begin{cases} 5000x + 10000y \leq 180000 \longleftrightarrow \text{Semillas} \\ 5000x + 5000y \leq 120000 \longleftrightarrow \text{Fertilizantes} \\ x \geq 0 \longleftrightarrow \text{Héctareas de frijol} \\ y \geq 0 \longleftrightarrow \text{Héctareas de maíz} \end{cases}$$

Paso 5. Representar gráficamente las restricciones. Se considera cada inecuación del sistema de inecuaciones, como una ecuación lineal sustituyendo los signos de las desigualdades por el signo "=", para trazar, sobre un sistema de ejes coordenados, las rectas correspondientes, como se observa en la Figura 14.14.

$5000x + 10000y = 180000$ Para $x = 0$, $y = 18$ Para $y = 0$, $x = 36$ Pares ordenados $(0, 18)$, $(36, 0)$	$5000x + 5000y = 120000$ Para $x = 0$, $y = 24$ Para $y = 0$, $x = 24$ Pares ordenados $(0, 24)$, $(24, 0)$	$x = 0$ Eje y	$y = 0$ Eje x

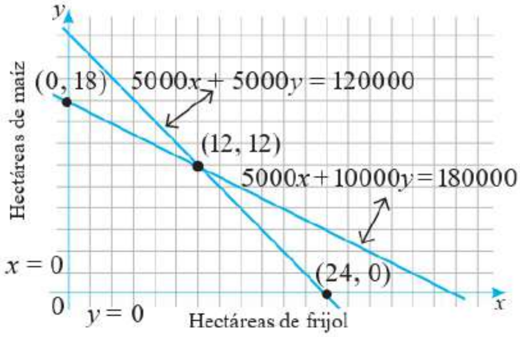


Figura 14.14. Método gráfico (sistema de ecuaciones).
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

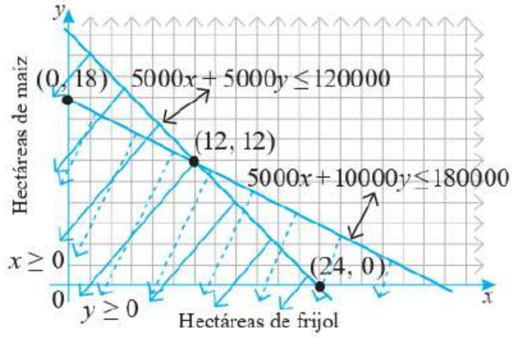


Figura 14.15. Restricciones en el plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Para determinar, en cada caso, a qué o cuál semiplano corresponde el conjunto solución de la inecuación, considera un punto cualquiera del plano cartesiano y comprueba si se satisface la desigualdad.

$5000x + 10000y \leq 180000$; para el par ordenado $(0, 0)$, $0 \leq 180000$, cumple.

$5000x + 5000y \leq 120000$; para el par ordenado $(0, 0)$, $0 \leq 120000$, cumple.

Paso 6. Encontrar la región factible. Se observa en la Figura 14.15 el conjunto de soluciones que satisfacen todas las restricciones del problema. Así mismo, en la Figura 14.16 se muestra la región factible.

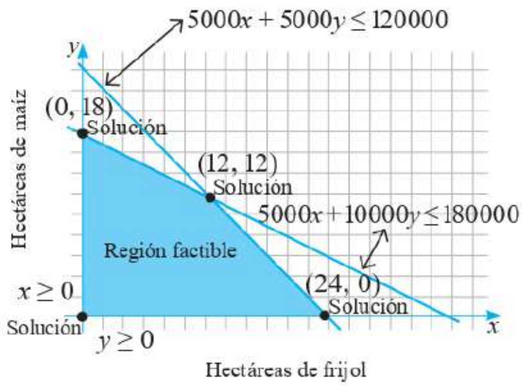


Figura 14.16. Región factible y soluciones (vértices).
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

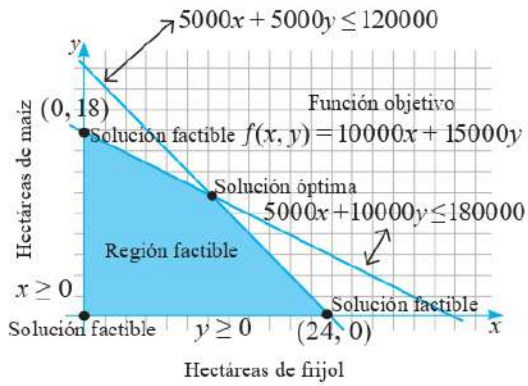


Figura 14.17. Solución óptima y soluciones factibles.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Paso 7. Identificar el vértice óptimo. Se deben sustituir todos los pares ordenados (vértices), soluciones factibles (ver Figura 14.17) en la función objetivo $f(x, y) = 10000x + 15000y$

$f(0, 0) = 10000(0) + 15000(0) = 0$

$f(0, 18) = 10000(0) + 15000(18) = 270000$

$f(12, 12) = 10000(12) + 15000(12) = 300000$

$f(24, 0) = 10000(24) + 15000(0) = 240000$

Paso 8. Interpretar la solución. Por tanto, como se pide cultivar tanto maíz como frijol, el agricultor debe cultivar 12 hectáreas de frijol y 12 hectáreas de maíz para minimizar sus costos de producción.

Actividad formativa 14.3

Resolver el siguiente problema aplicando la programación lineal.

Un agricultor tiene dos tipos de cultivos que puede sembrar en su parcela: maíz y frijol. El agricultor quiere determinar cuántas hectáreas de cada cultivo debe sembrar para maximizar su beneficio total, mismo que está sujeto a las siguientes restricciones.

Cada hectárea de maíz requiere dos horas de trabajo y dos unidades de fertilizante, cada hectárea de frijol requiere dos horas de trabajo y una unidad de fertilizante, el agricultor dispone de un total de 140 horas de trabajo y 100 unidades de fertilizante, el beneficio por hectárea de maíz es de $20,000.00 y el beneficio por hectárea de frijol es de $12,000.00.

Resolución:

Paso 1. Definir el problema.

Paso 2. Identificar las variables.

Paso 3. Definir la función objetivo.

Paso 4. Establecer restricciones.

Paso 5. Representar gráficamente las restricciones. Se considera cada inecuación del sistema de inecuaciones, como una ecuación lineal sustituyendo los signos de las desigualdades por el signo "=", para trazar, sobre un sistema de ejes coordenados, las rectas correspondientes. Apoyarse en el plano cartesiano de la Figura 14.18.

Para x = _____, y = _____
Para y = _____, x = _____
Pares ordenados
(_____, _____), (_____, _____)

Para x = _____, y = _____
Para y = _____, x = _____
Pares ordenados
(_____, _____), (_____, _____)

x = _____ Eje y

y = _____ Eje x

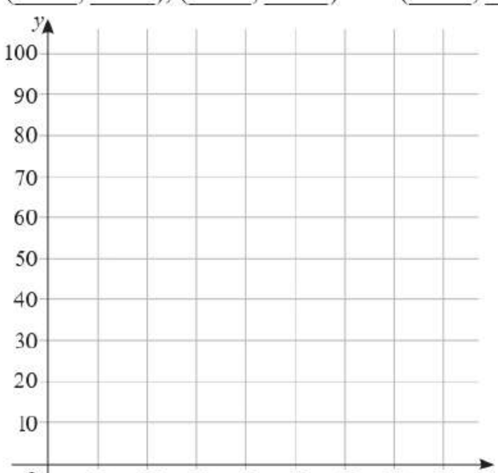


Figura 14.18. Restricciones en el plano cartesiano.
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

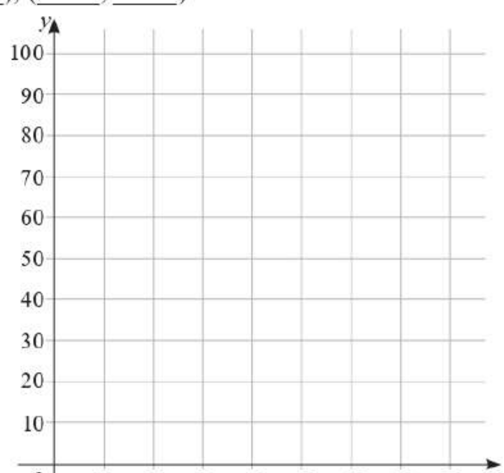


Figura 14.19. Región factible y soluciones (vértices).
Fuente: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Para determinar, en cada caso, qué semiplano corresponde el conjunto solución de la inecuación se considera un punto cualquiera del plano cartesiano y se conoce si se satisface la desigualdad. Apoyarse en la Figura 14.19.

Paso 6. Encontrar la región factible.

Paso 7. Identificar el vértice óptimo. Se deben sustituir todos los pares ordenados (vértices) soluciones factibles en la función objetivo:

$f(x, y) =$ ________________________________

Paso 8. Interpretar la solución.

En el uso del teorema fundamental de la programación lineal también puedes usar métodos algebraicos y evitar realizar las gráficas. Para realizar las gráficas puedes hacerlo aplicando GeoGebra, así mismo, con el método PHPsimplex en la opción del método gráfico.

EVALUACIÓN FORMATIVA 14.1

Resuelve los siguientes problemas de optimización utilizando la programación lineal por el método gráfico.

1. Como apertura, en un restaurante de sushi, pizzas y hamburguesas deciden crear dos paquetes (charolas) de promoción: la primera promoción consta de dos sushis mar y tierra, dos pizzas de pepperoni y una hamburguesa clásica con papas; y la segunda promoción: tres sushis mar y tierra, una pizza de pepperoni y dos hamburguesas clásicas con papas. Para ello destinaron, 40 sushis, 32 pizzas y 25 hamburguesas.

   El primer paquete se vende en 300 pesos y el segundo en 350 pesos.

   a) ¿Cuántos paquetes de cada tipo se deben vender para obtener los mayores ingresos?

   b) Si cada paquete obtiene un beneficio del 30%, ¿cuál será el beneficio total?

2. La modista que hace los vestidos más exclusivos en Sinaloa para bodas y fiestas de XV años, necesita para su elaboración 20 minutos de trabajo manual y de 30 minutos en trabajo con la máquina para los vestidos de bodas y, para los vestidos de XV años necesita 20 minutos de trabajo manual y 10 de trabajo con la máquina de coser.

   Si la modista al mes dispone de 180 horas totales de las cuales usa 100 horas para trabajo manual y 80 para trabajar con la máquina, sabiendo que la ganancia por vestido es de \$500 y \$400 respectivamente, ¿cómo podría la modista obtener el máximo beneficio?

AUTOEVALUACIÓN Y COEVALUACIÓN

Nombre: ______________________ Plantel: ______________ Grupo: ____ Turno: ____

Autoevaluación para el aprendizaje

Selecciona en la columna la opción que mejor refleje tu nivel de desempeño en el proceso para el aprendizaje de la progresión de aprendizaje 14. Responde con honestidad a la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propicié un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participé activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuí colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Formulé argumentos claros, estructurados y fundamentados en la evidencia recopilada al resolver un problema de programación lineal. (M4-C2)			
Planteé un problema de programación lineal empleando técnicas de sistemas de inecuaciones lineales. (M4-C3)			
Organicé la información relevante relacionada con un problema de programación lineal. (M3-C4)			

Coevaluación para el aprendizaje

Solicita a un compañero del equipo que marque en la columna la opción que mejor describa tu desempeño durante el trabajo colectivo, una vez concluida la progresión de aprendizaje 14, y que responda con honestidad la evaluación de cada uno de los criterios que se enlistan a continuación.

Desempeño	En proceso de logro	Bueno	Sobresaliente
Propició un clima de comunicación favorable para el aprendizaje con mis compañeros.			
Participó activamente con ideas para la toma razonada de decisiones.			
Contribuyó colaborativamente en la retroalimentación de dudas de mis compañeros.			
Formuló argumentos claros, estructurados y fundamentados en la evidencia recopilada al resolver un problema de programación lineal. (M4-C2)			
Planteó un problema de programación lineal empleando técnicas de sistemas de inecuaciones lineales. (M4-C3)			
Organizó la información relevante relacionada con un problema de programación lineal. (M3-C4)			

____

Nombre y firma de quien coevalúa

Bibliografía de consulta para el estudiante y el profesor

Bibliografía consultada

Aguilar, A., Bravo, F. V., Cerón, M. y Reyes, R. (2009). *Matemáticas simplificadas* (Segunda ed.). Pearson.

Artacho, A. (16 de mayo de 2024). *La Pirámide de Keops y el Teorema de Tales.* Matematicascercanas.com. Disponible en: https://matematicascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/

Baldor, A. (2011). *Aritmética* (2da. ed.). Grupo Editorial Patria.

Colavita, E, (2023). *Pensamiento matemático II*. Macmillan Education.

García, N. A., Cabrera, M. Á. (2023) *Pensamiento Matemático 2*. Conecta Editores.

Haro, A., Esparza, D., Amaya, J. yLechuga, S. (2024). *Pensamiento Matemático 2* (Primera ed.). México: Patria.

Juarez, J. A., Ylé, A. y Flórez, A. (2019). *Matemáticas III. Geométria y trigonometría*. Servicios Once Ríos Editores.

Papini, M. C. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *6*(1), 41-71.

SEP (2023a). *Acuerdo número 09/08/23 por el que se establece y regula el Marco Curricular Común de la Educación Media Superior*. Diario Oficial de la Federación.

SEP (2023b). *Orientaciones Pedagógicas del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

SEP (2023c). *Progresiones de aprendizaje del recurso sociocognitivo pensamiento matemático*. SEMS.

SEP (2023d). *Programa de estudios del Recurso Sociocognitivo Pensamiento Matemático I*. Secretaría de Educación Pública.

Spiegel, M. R., y Moyer, R. E. (2007). *Álgebra superior* (Tercera ed.). McGraw-Hill.

Sullivan, M. (2013). *Álgebra y Trigonometría* (Novena ed.). Pearson.

Vizcarra, F., Forneiro, R., Flórez, A., y Sosa, C. E. (2022). *Matemáticas II. Álgebra para Bachillerato Por Competencias*. Servicios Editoriales Once Ríos.

Ylé, A., Juárez, J. A. y Flórez, A. (2017). *Matemáticas 1. Aritmética y álgebra para bachillerato por competencias*. Once Ríos.

Referencia a las fuentes de consulta de tablas

Tabla 2.1 Productos notables. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 2.2 Factorización de polinomios. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 4.1 Criba de Eratóstenes. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 12.1. Diferentes representaciones de una función matemática. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 13.1. Sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 consistentes e inconsistente. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Tabla 13.2. Métodos algebraicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Referencia a las fuentes de consulta de imágenes

Figura 1.1. Traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático. *Fuente:* Wordwall (Smunizch, 2024).

Figura 2.1. Crucigrama de términos matemáticos. *Fuente*: Elaboración propia, (Excel, 2024).

Figura 2.2. Elementos que conforman el monomio. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 2.3. Elementos de un término algebraico. *Fuente*: Elaboración propia (Word. 2024).

Figura 3.1. Palomas. *Fuente*: Susana Rosique. Disponible en: https://www.hacerfamilia.com/educacion/noticia-palomas-gavilan-fabulas-ninos-20150611112432.html

Figura 3.2. George Pólya. *Fuente*: Instituto de matemáticas UNAM. Disponible en: https://paginas.matem.unam.mx/cprieto/biografias/biografias-de-matematicos/biografias-de-matematicos-p-t/polya-george

Figura 3.3. Distribución del huerto escolar. *Fuente*: Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

Figura 3.4. Dimensiones del huerto. *Fuente:* Elena Ruelas, Autodesk ID 2024.

Figura 3.5. Canchas de voleibol y basquetbol. *Fuente:* Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 5.1. Mínimo común múltiplo y máximo común divisor de números compuestos. *Fuente:* Elaboración propia (PowerPoint, 2024).

Figura 5.2. División y distribución de las parcelas (máximo común divisor). *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Figura 6.1. Relación entre perímetro y el diámetro. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.2. Longitud de la diagonal de un cuadrado de lado una unidad. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 6.3. Propiedades de los números reales. *Fuente:* Elaboración propia, (Word, 2024).

Figura 6.4. Representación gráfica de las medidas de una hectárea (1000 m^2). *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura. 7.1. Triángulos semejantes que se forman por la proyección del sol sobre la Pirámide de *Keops* y sobre un bastón. Los ángulos de los triángulos formados son iguales, por lo tanto, dichos triángulos son semejantes. Disponible en: https://matematicascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/ *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.1. Terrenos de áreas con figuras irregulares. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.2. Área con forma irregular. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.3. Triángulo. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.4. Base y altura de un triángulo. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.5. Área del ΔABC. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.6. Triángulo rectángulo. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.7. Triángulo escaleno. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.8. Región sombreada del cuadrado. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 9.9. Diagonales del cuadrado. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).

Figura 12.17. Gráfica de $f(x) = x^3$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 12.18. Gráfica de $f(x) = -x^3$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 12.19. Efecto del parámetro a en la monotonía de la función $f(x) = ax^3$. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 12.20. Efecto del parámetro a en la concavidad de la función $f(x) = ax^3$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 13.1. Sistema de ecuaciones lineales con una única solución. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 13.2. Sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 13.3. Sistema de ecuaciones lineales sin solución. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 13.4. Representación gráfica de los tres casos posibles de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 13.5. Rectángulo con medidas x, y. *Fuente*: Elaboración propia (Word, 2024).
Figura 13.6. Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales de 2×2. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.1. Siembra de maíz. *Fuente*: Fotografía, César Pilar Quintero Campos.
Figura 14.2. Gráfica de la ecuación $2x + 3y = 10$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.3. Puntos de prueba para la inecuación $2x + 3y < 10$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.4. Conjunto solución de la inecuación con dos variables $2x + 3y < 10$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.5. Gráficas de las ecuaciones $x + 2y = 1$, $x + 2y = 10$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.6. Puntos de prueba para cada inecuación $x + 2y \geq 1$, $x + 2y < 10$. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.7. Conjunto solución de cada inecuación lineal de dos variables. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.8. Conjunto solución del sistema de inecuaciones. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.9. Región factible. *Fuente:* Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.10. Región factible con solución única óptima. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.11. Región factible con solución múltiple. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.12. Región factible con solución no acotada. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.13. Solución no factible. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.14. Método gráfico (sistema de ecuaciones). *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.15. Restricciones en el plano cartesiano. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.16. Región factible y soluciones (vértices). *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.17. Solución óptima y soluciones factibles. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.18. Restricciones en el plano cartesiano. *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).
Figura 14.19. Región factible y soluciones (vértices). *Fuente*: Elaboración propia (GeoGebra, 2024).

Referencia a las fuentes de consulta de los códigos QR

QR. 1.1. Lenguaje matemático y lenguaje natural. Disponible en: https://wordwall.net/es/resource/5876774/lenguaje-algebraico. *Fuente*: Parzibyte 2024.
QR. 1.2. Origen de algunos de los símbolos matemáticos. Disponible en: https://culturacientifica.com/2016/01/27/el-origen-de-los-signos-matematicos/ *Fuente*: Parzibyte 2024.
QR. 2.1. Demostración geométrica de productos notables. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=U8U1Q3vyrFU *Fuente*: Parzibyte 2024.
QR 3.1. Evaluación diagnóstica. *Fuente*: Parzibyte 2024.
QR 3.2. Biografías de matemáticos: George Pólya. *Fuente*: Parzibyte 2024.
QR 4.1. Video descomposición de un número en factores primos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=NPaB-Fe6QBDQ. *Fuente*: parzibyte 2024.
QR 6.1. Ubicación de números irracionales en la recta numérica. Disponible en: https://youtu.be/e9E0XpWkFL8 *Fuente*: Parzibyte, 2024.
QR 9.1 Video de ángulos asociados a una circunferencia. Disponible en: https://youtu.be/RbA08b1iEtM *Fuente*: Parzibyte 2024.
QR 10.1. Daniel Carreón (18 de noviembre de 2018) Video sobre los criterios de Congruencia de triángulos. Disponible en: https://www.youtube.com/watch?v=U4MTmLvvKQ4 *Fuente*: Parzibyte, 2024.
QR 10.2. Complemento de la actividad formativa 10.4. *Fuente*: Parzibyte, 2024.
QR 10.3. Complemento de la actividad formativa 10.5. *Fuente*: Parzibyte, 2024.

Ilustración de portada y portadilla

MUSEO SOUMAYA, https://pxhere.com, By: naturemyhome, user_id: 10227311, Imagen de naturemyhome en Pixabay; Cámara: Canon EOS 70d, Tipo de medio: JPG, Resolución: 5472 x 3648, Fecha de publicación: 26 de septiembre de 2018. FONDO TRIÁNGULOS; Black-and-white-architecture-pattern-line-geometric-facade-1390141-; https://pxhere.com/es/photo/1390141?utm_content=shareClip&utm_medium=referral&utm_source=pxhere; <p>from PxHere</p>; <img src="https://c.pxhere.com/photos/a7/18/triangle_minimal_geometric_facade_architecture-1390141.jpg!d" srcset="https://c.pxhere.com/photos/a7/18/triangle_minimal_geometric_facade_architecture-1390141.jpg!d" alt="en blanco y negro, arquitectura, patrón, línea, geométrico, fachada, monocromo, circulo, diseño, triángulo, simetría, mínimo, forma, Iluminación natural, Fotografía monocroma, Fotos gratis In PxHere">
Ilustración de Evaluaciones formativas, Grecas verde y negro, fragmento de la Imagen de pencil parker en Pixabay.

GLOSARIO

Construye un glosario de términos y conceptos básicos.

Construye un glosario de términos
y conceptos básicos.

Pensamiento matemático II

Se terminó de imprimir en noviembre de 2024 en los talleres gráficos
de Servicios Editoriales Once Ríos, S.A. de C.V.,
Luis González Obregón S/N, Nuevo Bachigualato, C.P. 80135,
Tel. 667 712 2950, Culiacán, Sin., México

Esta obra consta de 20,000 ejemplares.

ISBN: 978-607-9432-67-6
9 786079 432676